UNIV OF TX AT AUSTIN - LIB STORAGE
04335419

2118839094
506 V641N V.13 1847 MAIN

506
V641n

LIBRARY
OF
THE·UNIVERSITY·OF·TEXAS

506
V641n
v.13

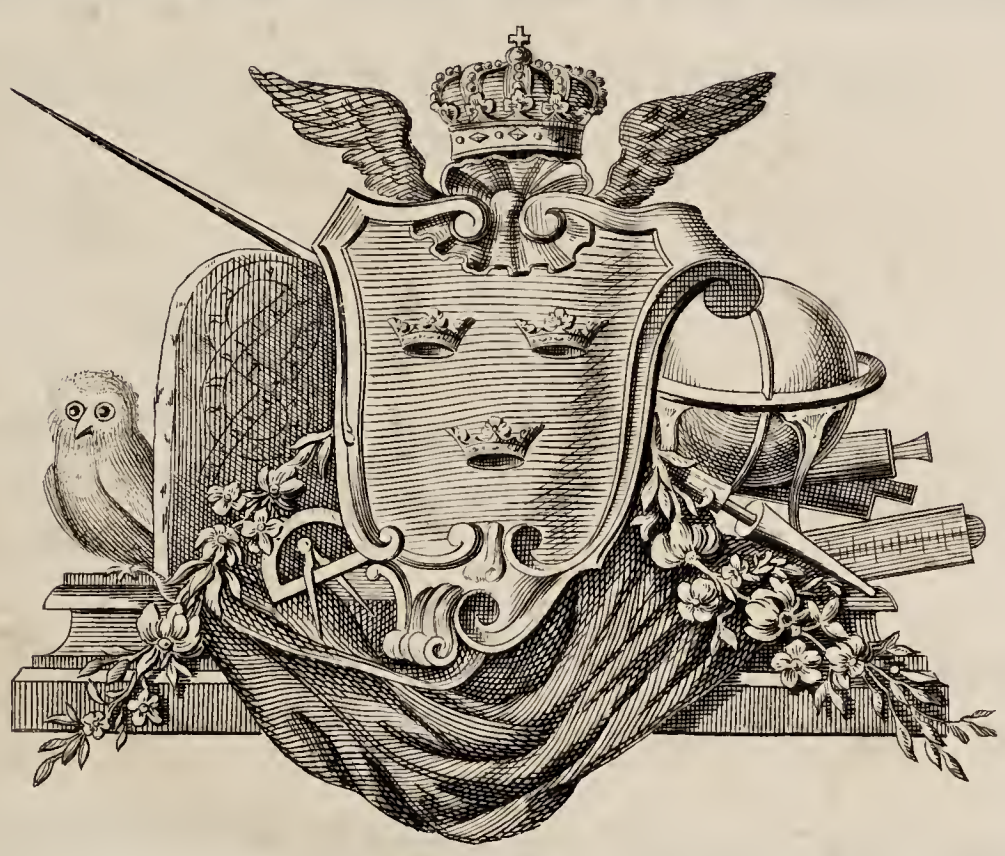
Digitized by the Internet Archive
in 2017 with funding from
IMLS LG-70-15-0138-15

https://archive.org/details/novaactaregiaeso1318kung

LIBRARY
UNIV. OF TEXAS

# NOVA ACTA
## REGIAE SOCIETATIS
# SCIENTIARUM
## UPSALIENSIS.

## VOL. XIII.



UPSALIAE
EXCUD. LEFFLER ET SEBELL REG. ACAD. TYPOGRAPHI.

MDCCCXLVII.

328511

# REGIA SOCIETAS SCIENTIARUM UPSALIENSIS.

***PRAESES ILLUSTRIS***

SERENISSIMUS PRINCEPS AC DOMINUS

**FRANCISCUS GUSTAVUS OSCAR**

SVECIAE ET NORVEGIAE PRINCEPS HAEREDITARIUS
UPLANDIARUM DUX.

## *Membra Honoraria.*

SERENISSIMUS PRINCEPS AC DOMINUS **OSCAR FREDERICUS,** SVECIAE ET NORVEGIAE PRINCEPS HAEREDITARIUS, OSTROGOTHIAE DUX. Membrum Societatis Honorarium Primarium.

**D'OHSSON** (Constantinus), Liber Baro, Legatus S:æ R:æ Majest. Extraordinarius, Reg. Ord. de Stella Polari, cum grandiori crucis insigni, Commendator.

**TROLLE WACHTMEISTER** (Hans Gabriel), Comes, e Regni Proceribus unus, Justitiæ quondam Cancellarius, Regiorum Ordinum Eques et Commendator.

**LÖWENHJELM** (Gustavus), Comes, e Regni Proceribus unus, Legatus Sacræ Regiæ Majest. Extraordinarius, Dux Generalis, Regiorum

Ordinum Eques et Commendator, Reg. Ord. Ensiferor. in Cl. II. Eques, Ordd. Imper. S. Annæ in Cl. I. et S. Wladimiri in Cl. II. Ord. Reg. de Aquila Rubra in Cl. I. Eques, Ord. S. Johannis Hierosolymitani Commendator cet.

WINGÅRD (Carolus Freder. A), S. Theol. Doctor, Ecclesiæ Sveogothicæ Archiepiscopus, Academiæ Upsaliensis Procancellarius, Regiorum Ordinum Membrum et Commendator, Academiæ Svecanæ Octodecimvir.

IIIRE (Albertus Elavus), Lib. Baro, e Regni Proceribus unus, Rerum externarum Minister Status supremus, Regiorum Ordinum Eques et Commendator, Reg. Ord. Norveg. de S. Olavo, cum grandiori Crucis insigni, Regg. Ordd. Danebrog., Isabellæ Catholicæ, S. Mauritii et Lazari, S. Stanislai, Leopoldi Belgici, Græc. de S. Salvatore, cum grandiori Crucis insigni, Commendator cet.

BERZELIUS (Jacob.), Lib. Baro, Med. et Ph. Doctor, Reg. Collegii Sanitatis Assessor, Chemiæ Professor, Reg. Acad. Scientiar. Stockh. Secretarius, Regg. Ordd. de Wasa et de S. Olavo, cum grandiori Crucis insigni, Commendator, Reg. Ord. de Stella Polari Eques, Reg. Ord. Danebrog. Commendator, Legionis Honoris, S. Stanislai Cl. I., S. Mauritii et Lazari, de Aquila Rubra Cl. II., Leopoldi Belgici et Ord. Welfici cet. Eques, Academiæ Svecanæ Octodecimvir.

FÅHRÆUS (Olavus Immanuel), Status a. h. Consiliarius, Præfecturæ Gothoburgensis et Bahusiæ Gubernator, Reg. Ord. de Stella Polari, cum grandiori Crucis insigni, Commendator.

GRUBBE (Samuel), Philos. Doctor, Status a. h. Consiliarius, Reg. Ord. de Stella Polari Eques, Academiæ Svecanæ Octodecimvir.

AGARDH (Car. Adolphus), S. Theol. Doctor, Dioeceseos Carolstadiensis Ordinumque Regiorum Episcopus, Reg. Ord. de Stella Polari, cum grandiori crucis insigni, nec non Reg. Ord. Danebrog. Commendator, Academiæ Svecanæ Octodecimvir.

## *Membra Ordinaria.*

SVANBERG (Jöns), S. Theol. Doctor, Mathematum Professor Upsaliensis emeritus, Membrum Reg. Ord. de Stella Polari, Regiæ Societatis a. h. Secretarius.

BREDMAN (Johannes), Astronomiæ Professor Upsaliensis emeritus, Eques Reg. Ord. de Stella Polari.

LAGERHJELM (Petrus), Regii Collegii Metallici Assessor, Eques Reg. Ord. de Stella Polari.

WAHLENBERG (Georgius), Med. Doctor, Medicinæ et Botanices Professor Upsaliensis, Eques Reg. Ord. de Stella Polari.

CRONSTRAND (Simon Andr.), Reg. Acad. Scient. Stockh. a. h. Astronomus et Professor, Reg. Ord. de Stella Polari, Ord. Imper. de S. Anna Cl. II. Eques.

HANSTEEN (Christoph.), Matheseos Professor Christianiensis, Eques Reg. Ord. de Stella Polari Regg. Ordd. Norveg. de S. Olavo nec non Danebrog. Commendator et Legionis Honoris Eques.

WALMSTEDT (Laur. Petr.), Chemiæ Professor Upsaliensis, Eques Reg. Ord. de Stella Polari.

ROMANSON (Henr. Wilh.), Med. Doctor, Anatomiæ Professor Upsaliensis emeritus, Eques Reg. Ord. de Stella Polari.

SCHRÖDER (Joh. Henr.), S. Theol. Doctor, Historiæ Litterariæ et Archæologiæ Professor Upsaliensis, Bibliothecarius Academiæ, Præfectus Nummophylacii, Regg. Ordd. a. h. Historiographus, de Stella Polari et Danebrog. nec non de S. Salvatore Græciæ, cum aurea Cruce, Eques.

HWASSER (Israël), Med. et. Ph. Doctor, Medicinæ Professor Upsaliensis, Reg. Ord. de Stella Polari et de S. Wladimiro in Cl. IV. Eques.

FRIES (Elias), Oeconomiæ practicæ Professor Upsaliensis, Regg. Ordd. de Stella Polari et Danebrog. Eques, Academiæ Svecanæ Octodecimvir, Reg. Societatis Secretarius.

HISINGER (Wilh. A), Officinæ Ferrariæ Possessor, Regg. Ordd. de Wasa Commendator, nec non de Stella Polari Eques.

EKSTRÖM (Car. Udalr.), Pastor et Præpositus Tjörnensis in Dioecesi Gothoburgensi.

SVANBERG (Adolphus Ferdinand.), Physices Professor Upsaliensis.

RETZIUS (Andr. Adolph.), Med. Doctor, Anatomiæ Professor Holmiensis, Regg. Ordd. de Stella Polari et Danebrog. Eques.

HEDENBORG (Joh.), Med. Doctor et Professor, Consulatus Svec. et Norveg. in Alexandria Secretarius, Regg. Ordd. de Stella Polari et de Wasa Eques.

SCHÖNHERR (Car. Joh.), Reg. Collegii Commerciorum Consiliarius, Regg. Ordd. de Wasa Commendator nec non de Stella Polari Eques.

NILSSON (Sveno), Hist. Nat. Professor Lundensis, Membrum Regg. Ordd. de Stella Polari et de Wasa, Reg. Ord. Danebrog. Commendator.

GYLLENSTJERNA (Nic. Christoph.), Lib. Baro, Cubicularius Regius, Reg. Ord. Ensiferor. Eques.

LÆSTADIUS (Laur. Levi), Pastor Ecclesiæ Karasuando Lapponiæ.

TORNBERG (Car. Joh.), LL. OO. Professor Lundensis Extraordinarius.

SVANBERG (Gust.), Astronomiæ Professor Upsaliensis.

MALMSTEN (Car. Joh.), Matheseos Professor Upsaliensis.

BERGSTRAND (Car. Henr.), Med. Doctor, Chirurgiæ Professor Upsaliensis.

BOËTHIUS (Jac. Edvard.), Juris Utriusque Doctor et Professor Upsaliensis, Reg. Ord. de Stella Polari Eques, Reg. Societatis Quæstor.

BESKOW (Bernh. von), Liber Baro, Philos. Doctor, Regiæ Aulæ Mareschallus, Academiæ Svecanæ Octodecimvir et Secretarius, Regg. Ordd. de Stella Polari, cum grandiori Crucis insigni, nec non Danebrog. Commendator, Legionis Honoris Eques.

REUTERDAHL (Henr.), S. Theol. Doctor et Professor Primarius, Archipræpositus Lundensis.

WREDE (Fabian. Jacob.), Liber Baro, Cubicularius Regius, Regg. Ordd. Ensiferor., Danebrog., Legionis Honoris, S. Joh. Hierosol. Eques.

SELANDER (Nic. Haqu.), Reg. Acad. Scientiar. Stockh. Astronomus et Professor.

BJÖRLING (Immanuel Gabr.), Matheseos Lector Reg. Gymnasii Arosiensis.

HOLMBOE (Bernhard. Michael), Matheseos Professor Christianiensis, Reg. Ord. de Wasa Eques.

MOSANDER (Car. Gust.), Pharmac. et Chem. Professor Holmiensis, Reg. Ord. de Stella Polari Eques.

PALMBLAD (Wilh. Fred.), Græcar. Litter. Professor Upsaliensis, Reg. Ord. de Stella Polari Eques.

SUNDEWALL (Fredericus), Med. Doctor, Anatomiæ et Physiologiæ Porfessor Upsaliensis.

GLAS (Olavus), Med. Doctor, Medicinæ Adjunctus Upsaliensis.

## *Adjunctus.*

MARKLIN (Gabriel), Reg. Societ. Bibliothecarius et Musei Præfectus.

## *Socii Exteri.*

GADOLIN (Joh.), Chemiæ Professor Aboënsis emeritus, Ord. Imperial. S. Wladimiri in Cl. IV. Eques.

FABRE (M. C.), pontibus aggeribusque publicis in Gallia Præfectus.

FRÆHN (Christ. Mart.), S. Theol. et Philos. Doctor, Imp. Ross. a Consiliis Status, Academiæ Imperial. Scientiar. Petropolitanæ sodalis ordinarius, Musei Asiatici Director et Bibliothecæ Præfectus honorarius, Ordd. S. Wladimiri in Cl. III. et S. Annæ in Cl. II. Eques.

ARAGO (Franc. Joh. Dominic.), Instituti Parisiensis Membrum et Reg. Academiæ Scientiarum in Classe Mathemat. Secretarius, Regg. Ordd. de Stella Polari nec non Legionis Honor. Eques cet.

HUMBOLDT (Alexander von), Liber Baro, Regi Boruss. a Consiliis intimis, Regg. Ordd. de Stella Polari nec non de S. Olavo, cum gran-

diori Crucis insigni, Commendator, Regg. Ordd. de Aquila Nigra, Legionis Honoris, Ord. Imper. S. Annæ in Cl. I. Eques cet.

FUSS (Paul. Henr.), Academiæ Scientiarum Petropolitanæ Secretarius, Ordd. Imper. S. Wladimiri in Cl. III. et S. Annæ in Cl. II. Eques.

GAY-LUSSAC (Ludov. Jos.), ad Scholam Polytechn. Paris. Chemiæ Professor, Instituti Paris. Membrum, Reg. Ord. Leg. Honor. Eques.

BIOT (J. B.), Instituti Paris. Membrum, Reg. Ord. Leg. Honor. Eques.

BUCH (Leopold von), Cubicularius Regis Boruss., Reg. Ord. de Stella Polari Eques, Reg. Ord. Norveg. de S. Olavo, cum grandiori Crucis insigni, Commendator, Reg. Ord. de Aquila Rubra Eques.

BROWN (Robert), Juris Utr. Doctor, Reg. Societ. Londinens. Socius.

KRUKENBERG (Petr.), Medicinæ Professor Halensis.

GRIMM (Jacob.), a. h. Histor. Litt. Professor Gottingensis, Reg. Ord. de Stella Polari Eques.

WERLAUFF (Eric. Christian.), Regi Dan. a Consiliis conferent., Histor. Professor Hafniensis, Bibliothecæ Regiæ Præfectus, Regg. Ordd. Danebrog. Commendator, de Stella Polari nec non Legionis honoris Eques.

MULLER (Joh.), Anatomiæ Professor Berolinensis.

MAI (Angelus), Sacræ Romanæ Ecclesiæ Cardinalis et Bibliothecarius.

BONAPARTE (Carolus Lucian.), Princeps de Canino et Musignano.

SCHULTÉN (Nathan. Gerhard. A), Mathem. Professor Helsingforsiensis, Ordd. Imper. S. Stanislai Cl. II. et S. Wladimiri Cl. IV. Eques.

SCHUMACHER (Henr. Christian.), Astronomiæ Professor Hafniensis, Regg. Ordd. Danebrog. Commendator et de Stella Polari Eques.

ENCKE (J. F.), Astronomiæ Professor Berolinensis, Reg. Acad. Scientiar. ibid. in Classe Phys. Mathem. Secretarius, Reg. Ord. de Aquila Rubra in Cl. IV. Eques.

TEMMINCK (C. J.), Musei Zoologici Leidensis Director.

BOECKH (Aug.), Græc. Litt. Professor Berolinensis, Reg. Acad. Scientiar. ibid. in Classe Histor. Secretarius, Reg. Ord. de Aquila Rubra in Cl. IV. Eques et de S. Salvatore Græc. Commendator.

OERSTED (Hans Christ.), Regi Dan. a Consiliis conferent., Physices Professor Hafniensis, Societ. Scientiar. Hafniensis Secretarius, Regg. Ordd. de Stella Polari, cum grandiori Crucis insigni, et Danebrog. Commendator, de Aquila Rubra et Legionis Honoris Eques cet.

SCHOUW (Joachim Freder.), Botanices Professor Hafniensis, Regg. Ordd. de Stella Polari et Danebrog. Eques.

QUATREMÈRE (Stephan.), LL. OO. Professor Parisiensis, Instituti Paris. Membrum, Reg. Ord. Legionis Honoris Eques.

GAUSS (Carol. Freder.), Astron. Professor Gottingensis, Regg. Ordd. de Stella Polari, Welfici et Danebrog. Eques cet.

FISCHER (Theodor.), Horti Botanici Petropolitani Præfectus, Consiliarius Status, Ord. Imp. de S. Anna Cl. II. Eques.

ANDRAL (G. Junior), Medicinæ Professor Parisiensis, Membrum Instituti Paris., Reg. Ord. Leg. Honor. Eques.

ESCHRICHT (Daniel Frederic.), Anatomiæ Professor Hafniensis, Regg. Ordd. de Stella Polari nec non Danebrog. Eques.

LETRONNE (Ant. Joh.), Archivorum Regni Galliæ Director nec non Bibliothecæ Regiæ Parisiensis Bibliothecarius supremus, Instituti Paris. Membrum, Regg. Ordd. Leg. Honoris et Danebrog. Eques.

RAOUL-ROCHETTE (Desider.), Conservator Nummophylacii Reg. Parisiensis, Instituti Paris. Membrum, Acad. Artt. Elegg. Secretarius, Regg. Ordd. Leg. Honoris et de S. Salvatore Græciæ Eques.

HANSEN (A. P.), Observatorii Astronomici Gothani Præfectus.

HAUSMANN (J. F.), Mineralogiæ Professor Gottingensis, et Reg. Societatis Scientiarum ibid. Secretarius.

HOOKER (Wilhelm. J.), Horti Botanici Kewensis Director.

COPLAND (Jacobus), Med. Doctor, Regiæ Societatis Londinensis Membrum.

## *Socii Litterarum Commercio Conjuncti.*

**RAFN** (Car. Christian.), Reg. Dan. a Consiliis Status, Professor, Reg. Societ. Antiquariorum Hafniensis Secretarius, Regg. Ordd. de Wasa Commendator, de Stella Polari, Danebrog. cet. Eques.

**GRETSCH** (Nicol.), Imp. Ross. a Consiliis Status, Academiæ Scientiar. Petropolitanæ Bibliothecarius, Ord. S. Annæ Cl. II. Eques.

**MAINARDI** (Caspar.), Mathes. Professor Universitatis Patavinæ.

**LITTROW** (Car. Ludov. von), Astron. Professor Vindobonensis.

**POGGENDORFF** (J. C.), Phys. Professor Berolinensis.

**NORDENSKÖLD** (Nic.), supremus rei Metallicæ per Finlandiam Director, Ordd. S. Annæ et S. Stanislai II. Cl., S. Wladimiri IV. Cl. Eques.

**FORCHHAMMER** (Joh. Georg.), Mineralogiæ Professor Hafniensis, Regg. Ordd. de Stella Polari et Danebrog. Eques.

**WEBER** (Wilh.), Phys. Professor Lipsiensis.

**ILMONI** (Immanuel), Med. Doctor et Professor Helsingforsiensis, Ord. S. Wladimiri IV. Cl. Eques.

**HAESER** (Henr.), Med. Professor Jenensis.

**SOMMER** (Andr. G.), Med. Doctor et Professor Hafniensis.

**BLYTT** (Matth. N.), Botan. Professor Christianiensis.

**KRÖIJER** (Henr.), Zool. et Physiol. Lector Hafniensis.

**SCHLECHTENDAHL** (F. L. von), Botan. Professor Halensis.

**HOLMBOE** (Christoph. Andr.), LL. OO. Professor Christianiensis, Numophylacii Præfectus, Reg. Ord. de Stella Polari Eques.

**LASSEN** (Christian.), LL. OO. Professor Bonnensis.

**GRUNERT** (F. A.), Mathem. Professor Gryphiswaldensis.

# HISTOIRE
# DE LA SOCIÉTÉ ROYALE DES SCIENCES
# D'UPSAL.

PAR

M. **J. H. SCHRÖDER.**

---

Mémoire lu dans la séance solennelle de la Société, le 16 Novembre 1844, lorsque Son Altesse Royale, Le Prince Gustave, Duc d'Upland, daigna faire Son entrée en fonctions comme *Præses Illustris* de la Société.

(Traduit du Suédois).

---

La Société Royale des Sciences ayant aujourd'hui, pour la première fois, l'honneur de voir en son enceinte son *Præses Illustris*, occupant en cette séance la même place d'honneur que son auguste Père a occupée durant 26 ans, plus d'un heureux souvenir, tiré des fastes de notre société, se présente à notre esprit.

Profondément reconnaissante de la protection dont elle a joui, la Société des Sciences se rappelle que quatre-vingts années sont bientôt révolues depuis que, comme à présent, deux augustes Fils de Roi partagèrent entr'eux le soin de protéger tout particulièrement notre Upsal et

ses établissemens littéraires. L'aîné*) se mit, comme Chancelier, à la tête des affaires de l'Université, tandis que son Frère cadet**), comme *Praeses Illustris* de la Société des Sciences, accorda de bonne heure sa protection à cette Société littéraire, la plus ancienne de notre patrie.

---

Dans une occasion aussi solennelle que celle-ci, la Société des Sciences a cru que sa séance devrait être ouverte par un exposé succinct de la première institution de la Société, de son développement et de son activité passée. L'origine de la Société des Sciences remonte à l'année 1710. Durant une longue suite de guerres, le roi CHARLES XII avait éprouvé le sort des armes et en avait enfin reconnu l'inconstance. La peste avait éclaté dans la capitale de la Suède, et la ville de l'Université, située à peu de distance, ne fut pas longtemps épargnée. La jeunesse studieuse quittait Upsal par groupes, et les auditoires académiques furent bientôt vides. Afin de pouvoir, durant cette époque fatale, "oublier, au moins pour quelques instans, les tristes objets qui, de toutes parts, s'offraient aux yeux et à la pensée" — comme s'exprime M. *Prosperin*, ancien Secrétaire de notre Société et en même temps son historien [1]), — le célèbre *Eric Benzelius*, alors Bibliothécaire en Chef de l'Université, avait invité quelques uns des savans d'Upsal à se réunir, une fois ou deux par semaine, dans les salons abandonnés de la Bibliothèque "afin de s'y entretenir d'objets littéraires". Ce furent, suivant l'indication de M. *Benzelius* dans sa Vie autographe (qui se trouve en tête de sa correspondance, publiée par M. *Lidén*): *Ol. Rudbeck* fils, *L. Roberg*, *J. Upmark (Rosenadler)*, *P. Elvius*, *Harald Vallerius*, *Jean Vallerius*, et autres. "Afin d'avoir toujours

---

*) Gustave, Prince Royal de Suède, Chancelier de l'Université d'Upsal en 1764.

**) Charles, Duc de Sudermannie, Président Illustre de la Société des Sciences en 1765.

matière de discours", continue *Benzelius*, "on correspondait avec *Christophe Polhem*, "qui, de ses fonds inépuisables en fait de Mathématiques et de Physique, répondait aux questions, proposait des problèmes, et donnait copie de beaucoup de ses pensées mathématiques." Bientôt advint le beau frère de *Benzelius*, *Emanuel Svedberg (Svedenborg)* qui, par la suite, ne fut pas moins célèbre.

*Eric Benzelius* fut lui-même l'âme de cette Société, à la fois comme son premier Membre, son Président et son Secrétaire. La Société des Sciénces n'a point en sa propre possession les annotations en guise de journal faites durant son premier stadium; elles se trouvent, cependant, en brouillon, quoique dans un état incomplet, parmi les riches collections manuscrites de M. *Benzelius* dans la Bibliothèque du Gymnase de Linköping, où nous avons eu occasion de les consulter.

Le premier quinquennium de la Société naissante ne fut d'abord distingué par aucune activité extérieure, visible aux yeux du public en général. Les résultats des travaux privés de la Société ou les "échantillons (specimina) de ses conférences et de ses correspondances", comme les appelle M. *Benzelius* lui-même, ne parurent publiquement qu'en **1716**, lorsque *Emanuel Svedberg (Svedenborg)* publia son *Dædalus Hyperboreus*, ou, comme il est dit sur le titre, "quelques nouveaux essais mathématiques et observations physiques". La préface les présente comme "le fruit et les prémices de la correspondanec entretenue pendant cinq ans par quelques savans d'Upsal." Les cinq sections qui, sous cette dénomination, parurent de **1716** à **1718**, doivent à juste titre être considérées comme la première partie des Actes de la Société des Sciences, quoiqu' à cause de leur extrême rareté elles s'y trouvent rarement réunies au complet [2]). Les mémoires insérés sont, pour la plupart, de *Svedenborg* et de *Polhem*, ainsi que quelques uns de *J. Vallerius*, de *Roberg* et d'autres, rédigés en Suédois, seulement avec

la différence que, dans la cinquième section, une traduction Latine est jointe au texte original en Suédois. On sentit bientôt le besoin de recourir à la langue commune des savans, lorsque on voulut communiquer, sans entremise étrangère, ses expériences et ses découvertes au public érudit au delà des confins de la Suède. Le *Dœdalus Hyperboreus* fit cependant en son temps beaucoup de bruit, et *Eric Benzelius* observe expressément qu'il valut à *Swedenborg* "une attention très gracieuse de la part du grand Roi CHARLES XII"; et il ajoute qu'une lettre de recommandation, adressée par "cette petite Société au Chancelier de la Cour M. *de Feiff*, en faveur de M. *Polhem*, le fit connaître également à S. M., de sorte qu'il entra, de plus en plus, dans les bonnes graces de S. M."

Une observation s'offre ici en passant. Dans les annotations du Baron *de Rosenhane*, riches en données pour l'Histoire de l'Académie des Sciences de Stockholm, on trouve indiqué que, pendant son séjour en Turquie, le roi CHARLES XII aurait eu l'intention d'instituer une Académie de Sciences dans la capitale de la Suède. Le Roi doit en avoir exprimé ses intentions dans une lettre au Senateur, M. le Comte *Nicodème Tessin*, auquel Il aurait destiné les fonctions de premier Président de l'Académie. Si cette idée avait pu s'offrir à l'esprit de CHARLES XII qui accorda toujours à *Eric Benzelius* une bienveillance particulière, lorsqu' Il fut informé de l'institut fondé par celui-ci à Upsal, c'est ce que nous ne pouvons pas discuter ici. Quoiqu'il en soit, le projet en question ne fut pas mis en exécution dans ce temps-là. Il fallut, pour cet effet, que vingt ans s'écoulassent encore, lorsqu' enfin *Linné*, de retour dans sa patrie de ses voyages à l'étranger, conjointement avec MM. *Triewald*, *J. Ahlströmer*, *A. J. de Höpken* et autres, fonda l'Académie Suédoise des Sciences[3]), dans un siècle encore peu favorable, pendant lequel les sciences et les arts durent se frayer un chemin à eux seuls, comme s'exprime assez laconiquement le Comte

de *Häpken* lui-même *), "sans encouragement signalé du thrône, mais aussi sans empêchement."

En attendant, les travaux de la Société des Sciences — qui, pendant les malheureuses années des derniers temps du régne de CHARLES XII étaient presque arrêtés — avaient été de nouveau ranimés, dans le courant de l'année 1719 et d'après un plan plus étendu, par *Eric Benzelius* [4]). Déjà l'année suivante, une nouvelle série des actes de la Société, sous le titre d'*Acta Litteraria Sueciæ*, fut prête à paraître. Dans l'introduction bien écrite de *Benzelius* il est dit, entr' autres: "*Permovit nos, ut manus huic labori admoveremus, Patriæ amor, quam viginti annorum luctuosa belli tempestate quassatam decet se ipsam exhortari ad litteras juvandas.*" — Ces actes parurent par cahiers, par trimestres, et dans la langue Latine, qui, encore de nos jours, continue d'être employée, seulement avec cette addition que, dans les derniers temps, la Société des Sciences a sans difficulté accordé une place dans ses actes à des mémoires d'un mérite distingué, écrits dans la langue Française qui de nos jours a commencé à se faire valoir, sous plus d'un rapport, comme la langue des sciences exactes.

Les quatre premiers volumes de ces *Acta Litteraria Sueciæ* étaient disposés à l'instar du *Journal des Savants* et des *Acta Eruditorum Lipsiensia*, qui, de leur temps, jouissaient d'une grande estime. — Ils furent d'abord reçus avec une telle approbation par le monde érudit, que les premiers cahiers en durent être réimprimés en Allemagne, et que la Société des Sciences se vit obligée, plus d'une fois, de faire revenir de cette contrée ses propres ouvrages [5]).

Cependant une époque de dix ans de la nouvelle carrière de l'acti-

---

*) Éloge du Senateur Comte *C. G. de Tessin*, 1771.

vité de la Société des Sciences n'était pas encore terminée, avant qu'elle fût menacée d'une perte à peu près irréparable. *Eric Benzelius*, son fondateur, fut appelé d'Upsal à une autre charge, celle d'Evêque de Gothembourg [6]). Avant de quitter l'Université, il fit tout ce qui était en son pouvoir pour étendre le cercle de l'activité de son institut favori et pour en assurer la stabilité. Sous le premier de ces rapports, il avait, de bonne heure, insisté sur l'établissement d'un Observatoire Astronomique, et avait, déjà en 1723, au nom de la Société des Sciences, redigé un projet d'en établir un dans l'une des tours du Château Royal, incendié en 1702. Il n'y avait pas lieu d'espérer, cependant, qu' avec les moyens peu considérables de la Société des Sciences, ce projet pût être mis en exécution. Dans des circonstances plus favorables, *A. Celsius* reprit plus tard le projet ajourné et le poursuivit avec tant de succès qu' en 1739 un Observatoire fut établi à Upsal, aux frais de l'Université. De ce nouvel institut d'enseignement sortit bientôt après le plus célèbre des disciples de *Celsius*, M. *Wargentin* [7]).

En attendant, Upsal posséda, déjà de 1720 à 1730, un Astronome instruit dans la personne d'*Eric Burman*, instituteur et prédécesseur de *Celsius*, tant dans les fonctions professoriales, que dans celles de Secrétaire. Ce fut un homme digne d'éloges, et en l'honneur duquel on doit observer que, déjà en 1722, il avait commencé à Upsal les premières Observations Météorologiques, lesquelles, plus tard, par un effet des soins et de l'encouragement de la Société des Sciences, commencèrent à être faites aussi dans les provinces les plus éloignées de la Suède. Elles furent, ensuite, réunies et mises en ordre par les soins de la Société, pour être transmises à la Royal Society de Londres, société avec laquelle la nôtre s'etait trouvée en correspondance dès son origine.

Comme, en ce temps-là, on ne pouvait compter sur aucune subven-

tion publique pour l'extension de cette société et d'autres entreprises scientifiques, M. *Benzelius* sollicita très-humblement auprès du Roi, en l'année 1725 et au nom de la Société des Sciences, que sa correspondance dans l'intérieur du pays comme à l'étranger fût déclarée libre de port, et que le droit exclusif de publier des Almanachs lui fût conféré. La première de ces demandes fut accordée, et la Société des Sciences en jouit encore, à l'exception de l'exemption du droit de port pour la correspondance extérieure, qui cessa déjà pendant l'époque de 1780 à 1790. La dernière, au contraire, celle du privilège des Almanachs, fut refusée. La Société des Sciences n'avait point, en ce temps, d'aussi puissans intercesseurs, que ceux que l'Académie des Sciences, instituée postérieurement, eut le bonheur d'obtenir. — *Eric Benzelius* sentit de bonne heure ce manque d'un protecteur auprès du Gouvernement. Dans la dernière séance à laquelle, avant son départ pour Gothembourg, il assista, le 18 Août 1727, il énonça l'idée que la Société des Sciences choisirait parmi Mrs. les Sénateurs quelques membres honoraires et un *Præses Illustris*, et il proposa pour cet effet le doyen des Sénateurs du Royaume et celui qui en était alors le plus influent, M. le Comte *Arvid Horn*. — Cette proposition fut agréée en tous points et obtint également l'assentiment du Gouvernement.

La première marque de protection que la Société des Sciences obtint de son *Præses Illustris*, nouvellement choisi, fut qu'il lui procura la sanction Royale (donnée le 11 Novembre 1728) du projet de Statuts que la Société avait très-humblement présenté. Il est dit dans cette sanction "que Sa Majesté accorde à la dite Société le nom de Societas Regia "Litteraria et Scientiarum, S. M. voulant toujours l'entourer de "Son Auguste protection et lui accorder la faveur de rapporter immédia-"tement à S. M. les cas et affaires qui réclament la décision gracieuse "de S. M." — De même lorsqu'une vacance aurait lieu dans la charge de *Præses Illustris* de la Société, "S. M. daignerait toujours Elle-Même la pourvoir d'un nouveau Président, d'après le très-humble projet présenté par

la Société"[8]). — Comme objets de l'activité de la Société des Sciences sont prescrits en général Res Litteraria, surtout les sciences Mathématiques et Physiques, l'Histoire Naturelle et la Géographie de la patrie, la langue Suédoise et les Antiquités, etc.

Les mémoires de la Société Royale des Sciences parurent ensuite sous le titre d'Acta litteraria et Scientiarum Succiæ. *Eric Burman* fut, après *Benzelius*, pendant un court espace de temps, Secrétaire de la Société. Le célèbre *André Celsius* lui succéda, et durant ses voyages à l'étranger, les mêmes fonctions furent remplies d'abord par *Samuel Klingenstjerna*, et ensuite par *Jean Ihre*. Les revenus de la Société des Sciences étaient alors fort restreints. Ils dérivaient principalement des subventions données par les membres eux-mêmes et des rentrées que la vente des Actes de la Société pouvaient fournir, lesquels se vendaient certainement alors très avantageusement dans les librairies étrangères, mais qui cependant n'auraient pas suffi aux dépenses croissantes, si *Eric Benzelius* n'avait, par son influence, procuré à la Société des Sciences un revenu supplémentaire de 8000 Dalers, monnaie de cuivre [9]). De cette manière, la Société des Sciences put, de temps à autre, payer des frais d'instrumens pour l'institution d'Observations Météorologiques dans les provinces, ainsi que des voyages dans la patrie vers ses contrées les plus septentrionales, qui en ce temps là étaient, pour ainsi dire, une terre inconnue. De cette manière fut expédié vers la Lapponie, en 1732, M. *Charles Linnæus*, alors jeune Étudiant de 25 ans, avec un secours tel que les fonds de la Société pouvaient l'admettre, savoir 400 Dalers monnaie de cuivre, comme l'attestent les comptes de la dite année. Ce fut un prélude aux subventions assurément peu fortes, mais cependant plus considérables que, dans des temps postérieurs et avec des revenus plus larges, la Société a pu allouer à cet objet. Le jeune élève remboursa bientôt largement le secours de voyage dont il avait joui, quoique, par suite d'incidens assez singuliers, la publication de la description même du voyage, appelée Lachesis Lapponica, fut long-

temps differée. Elle fut transportée en Angleterre, ainsi que ses autres manuscrits et ses collections d'histoire naturelle; et ce n'est qu'en 1811 qu'elle a été imprimée en deux volumes in 8:o, après avoir été traduite en anglais par les soins de Mr. *Smith*. Outre cette première subvention allouée à *Linné*, la Société des Sciences eut quelques années plus tard, en 1738, une occasion de reconnaître, comme elle désirait, le mérite du voyageur, à son retour dans la patrie à une époque où, comme il le raconte lui-même dans ses annotations biographiques, "il paraissait être à peine connu dans la capitale de la Suède". *Linné* dit lui-même "que la seule marque d'estime qu'il reçut des siens, fut d'être reçu à l'unanimité dans la Société des Sciences d'Upsal." Par cette première distinction, qui depuis fut suivie de plusieurs autres, *Linné* fut reconquis pour toujours à sa patrie. Bientôt nous le voyons engagé comme Professeur de Botanique à Upsal et en même temps, par suite de la mort prématurée d'*André Celsius*, comme Secrétaire de la Société des Sciences.

Sous le Secrétariat d'*André Celsius* et de *Linné*, les Actes de la Société des Sciences parurent sous le titre d'Acta Societatis Regiæ Scientiarum Upsaliensis, et le lecteur attentif peut observer facilement qu'ils ont gagné, tant pour le fond que pour la forme. Les notices littéraires et les critiques d'ouvrages érudits en furent séparées, et devaient être publiées dans un journal spécialement destiné à ce but. L'essai que fit *O. Celsius* fils, alors Adjoint de la Société, de publier un tel journal, sous le titre de Nouvelles des travaux des Savans *) ne réussit pas mieux à couvrir les frais de la publication que celui qui a été tenté de nos jours; car il commença et finit avec l'année 1742. Les revenus restreints de la Société des Sciences arrêtèrent, plus d'une fois, son activité et purent d'autant moins permettre de venir au secours du Journal commencé qu'ils suffisaient à peine à la publication de ses propres Mémoires.

---

*) *Tidningar om the Lärdas arbeten. Ups. 1742.*

La Philologie en général et celle du Nord en particulier avait de bonne heure fixé l'attention de la Société des Sciences. Les matériaux réunis par *Ol. Rudbeck* fils pour un Thesaurus Linguarum Harmonicus, auxquels la Société des Sciences consacra une partie de son activité et dont les Actes de la Société conservent des échantillons épars, sont à la vérité peu considérables. Les mémoires fournis par *Ol. Celsius* l'aîné et *G. Wallin* sont plus importants, et témoignent de plus de critique. Leur valeur archéologique et philologique leur assurera en tout temps une place distinguée [11]). Les annotations faites en guise de journal par la Société des Sciences attestent aussi que de bonne heure l'on songea à des recueils de mots pour un Dictionnaire des Dialectes Suédois.

Le Sénateur Comte *Gustave Bonde*, qui en 1733 succéda à M. le Comte *Arvid Horn* en qualité de *Præses Illustris*, accorda à cette oeuvre patriotique une attention particulière. *Ol. Celsius* l'aîné, comme lui ami des langues et des antiquités, accueillit avec empressement l'idée d'un Dictionnaire Suédois, et il inséra dans le 3:me volume des *Acta Litteraria* de l'année 1732 un commencement de ce travail, embrassant une partie de la lettre *A*. Vers la même époque, un autre membre, le Professeur *E. Alstrin*, plus tard Evêque de Strengnäs, avait d'après l'invitation de la Société des Sciences rédigé des observations sur l'Orthographe de la langue Suédoise [12]). Le travail pour ce dictionnaire, distribué entre plusieurs rédacteurs, devant éprouver de nombreuses difficultés pour être mis en exécution, la Societé des Sciences se vit engagée, en 1738, à en confier l'exécution complète à son illustre membre *J. Ihre*, conformément à l'avis du Comte *Bonde*. La Société des Sciences ne se rappelle pas sans une certaine fierté que ce fut à son instigation que le grand philologue acheva en 1769 son Glossarium Svio-Gothicum, fruit de 30 années d'études. M. *Ihre* avait aussi eu le bonheur d'obtenir pour son ouvrage un secours des fonds

publics, ce qui cependant, durant la domination changeante des partis, lui attira plus d'une fois des désagrémens. La postérité devait mieux que ses contemporains rendre justice à une oeuvre qui avait demandé tant d'années de travail [13]).

Les annotations du journal de la Société des Sciences attestent aussi qu'elle a de bonne heure consacré ses soins à l'étude géographique de la patrie. Encouragé par elle, *Er. Tuneld* publia en 1740 sa célèbre Géographie de la Suède, dont la première édition est précédée d'un avant-propos de la Société des Sciences, signé par son Secrétaire *A. Celsius*, où cet ouvrage est surtout recommandé à la jeunesse studieuse "qui jusqu' ici, faute d'une telle publication, était resté étrangère dans sa propre patrie." [14]) — C'était dans la même intention que le Directeur de l'Observatoire d'Upsal *O. P. Hjorter* avait, déjà en 1739, d'après l'invitation de la Société des Sciences et à ses frais, publié un Calendrier Astronomique. Afin de favoriser de plus en plus le développement des études géographiques, qui, faute de guides convenables, rencontrait maints empêchemens dans nos etablissemens d'enseignement supérieurs et inférieurs, la Societé des Sciences prêta, autant qu'il dépendait d'elle, de l'encouragement et du secours au Graveur attaché à son service *A. Åkerman*. L'Atlas portatif qu'il a publié, et surtout ses Globes de grandes et de petites dimensions, confectionnés sous l'inspection de la Société des Sciences, de 1760 à 1770, eurent un grand succès. — L'histoire naturelle de la patrie ne fut pas non plus laissée sans attention. Un ouvrage encore de nos jours fort estimé, les Aranei Suecici de *C. Clerck*, ouvrage de luxe pour cette époque, orné de planches illuminées avec soin, fut aussi publié à l'instigation de la Société des Sciences en 1757.

Sur la recommandation de M. le Comte de *Bonde*, le projet d'une organisation plus convenable relativement au nombre et à la classification

des membres de la Société obtint la sanction royale, le 15 Janvier 1742, et elle fut ainsi autorisée à choisir, outre ses 24 membres ordinaires et honoraires, des Membres étrangers, des Adjoints et des Correspondans [15].

Après S. E. M. le Comte *Bonde*, qui mourut dans un âge fort avancé, en 1764, ayant rempli pendant près de 30 ans les fonctions de Président de cette Societé, celle-ci choisit pour son *Præses Illustris* S. A. R. le Prince Héréditaire CHARLES, Duc de Sudermannie; choix auquel cet auguste Prince daigna mettre un si grand prix que, lorsque plus tard Il monta sur le thrône de la Suède comme Roi, Il voulut bien déclarer que, la Société des Sciences d'Upsal ayant été la première Société savante qui L'eût appelé dans son sein, Il voulait aussi conserver pendant Sa vie cette présidence, qui ne fut transférée qu'à l'occasion du décès de S. M. en 1818, à S. A. R. le Prince Royal OSCAR, notre auguste Souverain actuellement régnant. La mémoire de la présidence semi-séculaire de CHARLES XIII est conservée par la médaille que la Société des Sciences fit frapper en 1815 et présenter à S. M. La devise heureusement trouvée: *Primus Amor Phoebi*, explique l'emblème du laurier, qui fut le premier amour de Phébus, avant que les coursiers du soleil fussent encore confiés à sa main.

Les Secrétaires de la Société des Sciences, pendant cette longue période, furent: le savant Orientaliste *C. Aurivillius*, l'Astronome *E. Prosperin* et le Bibliothécaire *P. F. Aurivillius.* Le premier eut le bonheur de pouvoir reprendre l'impression des Mémoires de la Société, interrompue pendant un assez long intervalle faute des moyens réquis. Ce fut à son *Præses Illustris* que la Société des Sciences dut l'importante subvention qui lui permit, entre 1770 et 1780, de publier une nouvelle suite de ses Mémoires, sous le titre de Nova Acta Regiæ Societatis Scientiarum Upsaliensis, avec une dédicace à S. A. R.

le Duc CHARLES de Sudermannie, où il est dit: "*Vellemus publice praedicare posse, quot quantisque pignoribus Societatem hanc litterariam devinxeris, et continente gratia devincias. Verum enim vero, quum ea mereri jusseris, publice vero laudare vetueris, parebimus, ut semper, Augusti Benefactoris jussui, silentiumque nobis ipsi imperabimus.*" — L'édition peu considérable du 1:r et du 2:d Volume fut bientôt épuisée, et a été réimprimée depuis en Allemagne. Mais la Société des Sciences possédant encore une bonne provision des volumes suivans, ainsi que les plaques gravées des planches de cet ouvrage, il serait peut être avantageux d'entreprendre la réimpression des volumes en question [16]).

L'auguste exemple donné ainsi par le *Præses Illustris* de la Société des Scienees influa, jusqu'à un certain point, sur ses propres membres. L'ami de *Linné*, le Baron *Charles De Geer*, encore de nos jours célèbre comme profond Entomologiste, et dont les Mémoires pour servir à l'Histoire des Insectes méritent l'estime des savans, fit cadeau d'un certain nombre d'exemplaires de son ouvrage pour être distribués, selon le projet de *Linné*, comme encouragement à quelques étudians en histoire naturelle. Un de ces exemplaires, celui du célèbre voyageur *Forskål*, accompagné des observations de *Linné*, se trouve dans la donation de S. E. M. le Comte de *Fleming*, à la Bibliothèque de l'Université d'Upsal. La Société des Sciences reçut une preuve d'une munificence encore plus grande de la part de deux autres disciples de *Linné*, le savant Minéralogue *Jean Abraham Gyllenhaal* et l'Apothicaire de la Cour *Frédéric Ziervogel* [17]). Unis, dès leur jeunesse, par un amour mutuel de l'histoire naturelle, par un penchant infatigable pour les collections et par des sentimens identiques, ils étaient convenus, déjà en l'année 1785, de faire don à la Société des Sciences de leurs importantes collections d'histoire naturelle et, de plus, d'un capital de 4,613 Rdr 15 sch. 4 r. Spécies, somme considérable pour ces temps-là. Mr. *Gyllenhaal* avait, en outre, de son vivant acheté l'ancienne habitation du

Professeur *J. Schefferus*, avec l'intention d'y faire construire un bâtiment plus étendu, à l'usage de la Société des Sciences et de ses collections. Lors de sa mort prématurée, en 1788, une aile en était seulement achévée — et ce ne fut pas sans effort qu'on parvint à la sauver de l'incendie qui, en 1809, dévasta la majeure partie du quartier appelé Fjerdingen. La Société des Sciences s'en sert encore pour ses réunions; et y conserve ses précieuses collections classées et augmentées, autant que l'espace étroit a pu le permettre, par les Adjoints de la Société Mrs. *G. Wahlenberg* et *G. Marklin*. Dans une petite maison de peu d'apparence, ancien musée de *Schefferus*, se trouve la Bibliothèque assez considerable de la Societé des Sciences, qu'on doit aussi à la générosité de *Gyllenhaal* et de *Ziervogel*.

Après la mort de M. *Gyllenhaal*, son ami *Ziervogel* transporta son domicile de Stockholm à Upsal, afin de classer et de soigner les collections de son ami et les siennes propres. Il mourut en 1792, et son portrait se trouve placé dans la salle des séances de la Société. Après son décès, le soin des collections fut confié aux Adjoints de la Société des Sciences, conformément au Réglement du 27 Avr. 1793.

Le frère de *Gyllenhaal*, M. *Leonard Gyllenhaal*, rivalisa de zèle avec M. *Ziervogel*. En son propre nom et en celui de ses cohéritiers, il exécuta avec empressement les dernières volontés du défunt, et donna lui-même, dans un âge très avancé, une nouvelle preuve de son affection envers notre Société, dont il fut enfin le Doyen, en mettant à exécution, en l'année 1836, son ancien projet de transmettre à la Société des Sciences, par le moyen d'une donation entre vifs, ses précieuses collections Entomologiques, qui occupaient 14 armoires dans sa terre de Höberg en Vestrogothie. L'année suivante, elles furent heureusement transportées à Upsal sous la surveillance du zélé Adjoint actuel de la Société des Sciences, en sorte que la Société possède maintenant la collection nor-

male appartenant aux Insecta Succiæ Coleoptera, dont la description en 4 volumes in 8:vo a rendu le nom de *Gyllenhaal* si célèbre parmi les naturalistes les plus distingués de nos temps.

La Société des Sciences, en reconnaissant tant de services importans rendus aux sciences naturelles, est heureuse de pouvoir compter au nombre de ses bienfaiteurs la famille du célèbre *Linné*. — La veuve de l'illustre Naturaliste, M:me *Sara Elisabeth Moræus*, legua, par lettres de donation en date de Hammarby le 8 Sept. 1803, à la Société Royale des Sciences d'Upsal une somme de 333 Rdr 16 sch. Spécies. "Depuis la perte de mon époux chéri, dit-elle dans ces lettres, la haute bienveillance de mes gracieux Souverains a été ma plus douce consolation. Je regarde ausssi le beau monument qui a été érigé dans la Cathédrale d'Upsal comme une marque inappréciable de la haute estime du public. J'aurais pris part avec plaisir aux dépenses qu'il a exigées, si la munificence des anciens amis et disciples de mon défunt époux n'eût rendu mon concours superflu. Désirant cependant contribuer, selon mes facultés, à entretenir sa mémoire, tout en répondant à ses propres intentions, j'ai resolu de l'aveu de mes proches d'offrir à la Société Royale des Sciences d'Upsal 333 Rdr 16 sch. Spécies, pour servir de fonds à un prix de science naturelle." — Cette somme fut remise à la Société des Sciences en 1805, et augmentée l'année suivante par la Faculté de Médecine de cette Université, par le versement de 150 Rdr, excédant de la somme destinée à l'érection du monument de *Linné*. Ce fonds reçut une nouvelle augmentation lors de la fête séculaire que l'Université d'Upsal célébra l'an 1807, à la mémoire du grand Naturaliste. Ses trois filles y ajoutèrent 333 Rdr 16 sch. Spécies, au sujet desquels elles donnèrent plus tard, à l'invitation de la Société des Sciences, une explication par écrit, en date du 18 Mai 1819, pour régler à l'avenir l'emploi de ce fonds consacré à des prix.

Ce fonds, successivement augmenté par le moyen d'arrérages jusqu'à la concurrence de 2000 Rdr de Banque, éleva le prix de *Linné* à 100 Rdr. Il fut accordé à l'Adjoint alors en fonctions de la Société, le Docteur *G. Wahlenberg*, en premier lieu, l'an 1812, pour la publication de sa Flora Lapponica, et en second lieu, l'an 1817, pour ses Petrificata Telluris Succanæ, mémoire qui occupe une place distinguée dans le 8:me Tome des Nouveaux Actes de la Société des Sciences. Ce prix a été en outre décerné aux mémoires suivans: Gothlandiæ Plantæ rariores, de *J. P. Rosén*, 1819; de Hymenopteris non aculeatis, de *G. Mærklin*, 1821; Loca parallela Plantarum, de *L. L. Læstadius*, 1833; et Symbolæ ad Bryologiam Scandinavicam, par *J. Ångström*, en 1844.

Les fonds donnés à la Societé des Sciences se sont élevés, pendant ces derniers temps, y compris les épargnes annuelles et les arrérages, jusqu'à la somme importante de 25,000 Rdr de Banque; et je m'empresse de faire observer que la Société des Sciences en est principalement redevable à l'administration aussi laborieuse que fidèle de son défunt Secrétaire, M. *Aurivillius*. Après sa mort arrivée en 1829, ils se sont ultérieurement accrus par les soins zélés que le Professeur *P. Sjöbring*, en sa qualité de Trésorier, leur accorda durant une époque de 12 années.

La Société des Sciences s'est ainsi vue en état d'augmenter successivement les salaires de ses employés et de pouvoir, sans de trop longs intervalles, publier plusieurs volumes de ses Mémoires. Non seulement elle a pu en faire cadeau à chacun de ces membres, mais encore aux Sociétés savantes à l'étranger avec lesquelles elle se trouve en correspondance. Outre cela, la Société des Sciences a pu distribuer, de temps à autre, des prix à des jeunes littérateurs, dont les traités ont été jugés dignes d'obtenir une place dans les Mémoires de la Société.

Par suite de l'état réglé où se trouvent actuellement ses finances, la Société des Sciences s'est vue à même de pouvoir, en conformité avec le testament de M. *Gyllenhaal*, dans ces derniers temps plus que par le passé, augmenter ses collections. De cette manière la Société a fait, en 1817, l'acquisition des manuscrits autographes du célèbre Physicien *Samuel Klingenstjerna*, moyennant une somme de 200 R:dr de Banque, payée aux héritiers de celui-ci; en 1834, celle des planches d'un ouvrage intitulé: Icones Plantarum Japonicarum par *Thunberg*, au prix de 33 R:dr 16 sch.; et en 1837, celle de la belle collection de Lichenes de Mr. *Agrelius*, pour la somme de 150 R:dr de Banque. De temps à autre, la Bibliothèque d'histoire naturelle de la Société a aussi été augmentée par plusieurs ouvrages de haut prix, tels que l'ouvrage précieux de *Cramer* sur les Papillons et l'Entomologie d'*Olivier*, ainsi que Die Versteinerungen Würtembergs, par *C. v. Zieten*, les Crustacés de la Méditerranée, par *P. Roux*, etc. Enfin la Société des Sciences a aussi fait l'acquisition du manuscrit du Nomenclator Botanicus de M. *Samuel Torner*, 20 volumes in quarto, composé en grande partie durant le séjour à Londres de l'auteur, tandis qu'il était admis conservateur de la Bibliothèque et de l'herbier de Sir *Joseph Banks*.

En 1836, la Société des Sciences a contribué, moyennant la somme de 450 R:dr de Banque, à une construction coûteuse ayant pour objet la détermination de la température de la terre, sous la direction d'un de ses membres, M. *Rudberg*, Professeur de physique, dont nous déplorons la mort prématurée. Afin d'engager un faiseur d'instruments de physique à s'établir ici, la Société lui a assigné pour commencer un revenu annuel de 100 R:dr de Banque.

A mesure que ses moyens le lui ont permis, la Société des Sciences a aussi, de temps à autre, distribué des secours à de jeunes naturalis-

tes de belle espérance, et assigné des traitements pour certains voyages dans des provinces situées aux extrémités de la Suède et de la Norvége. Ainsi, en 1817, il a été accordé à M. *Wahlenberg*, alors Adjoint de la Société des Sciences, un traitement de 100 Rdr de Banque pour lui faciliter les moyens de compléter et d'achever, par de nouvelles recherches, son traité sur les Pétrifications de la Suède.

Pour un voyage de botanique au Sognefjorden en Norvége, la Société accorda, en 1832, à M. *Cl. G. Myrin*, agrégé de l'Université d'Upsal, un traitement de 500 Rdr de Banque — la plus forte somme que, jusqu'ici, la Société s'est vue en état de pouvoir verser entre les mains d'une seule personne. Le décès de ce jeune homme, mort peu de temps après, à la fleur de l'âge, a privé la Société des fruits qu'elle devait s'attendre du zèle et des lumières dont il était doué.

La Société des Sciences a aussi, à différentes époques, accordé à son Adjoint actuel, M. *Marklin*, des traitements de voyage, savoir en 1834, pour un voyage en Norvége, 200 Rdr; en 1840, pour le même but, 150 Rdr, et en 1843, pour un voyage dans le midi de la Suède dans le but d'y recueillir des pétrifications, 200 Rdr. En 1840 il a été accordé à M. *J. P. Arrhenius*, pour un voyage de botanique, 150 Rdr; et en 1842, à un jeune étudiant Mr. *D. S. Högberg*, 100 Rdr. La Société des Sciences a aussi porté son attention sur l'Université-soeur de Lund. Ainsi, en 1837, 200 Rdr ont été accordés à M. le Candidat *J. E. Areschoug*, pour un voyage en Norvége dans le but d'y étudier les Algues. — Cette année il a été accordé à trois jeunes académiciens, savoir MM. *E. G. Björling*, agrégé de mathématique, *J. P. Arrhenius*, agrégé de botanique, et *C. G. Santesson*, licencié en médecine, à chacun 133 Rdr 16 sch. pour leur faciliter les moyens de prendre part aux délibérations de l'assemblée des naturalistes scandinaves à Christiania.

Ces secours — aujourd'hui égalant complètement ceux dont les au-

tres sociétés savantes de notre pays, avec leurs ressources en général fort limitées, sont capables — n'ont jamais été étrangers à l'activité de la Société des Sciences, même en y comprenant le temps où, se trouvant encore au commencement de sa carrière, elle ne pouvait guère compter sur d'autres ressources que celles qui lui étaient fournies par les contributions de ses propres membres. Son premier secours de cette nature fut accordée au jeune *Charles Linnæus*, étudiant, nouvellement arrivé à l'Université, pour sa première excursion de botanique à l'île de Gräsön dans l'Archipel du Roslagen, pendant l'été de 1729. Le total des frais de ce voyage ne s'éleva qu'à la somme de 18 Daler en cuivre. — Soixante années plus tard les prétentions étaient encore tellement modiques, que la Société des Sciences se vit dans le cas de distribuer à un jeune chimiste, *A. G. Ekeberg*, un encouragement de 10 Rdr en espèces. *Tempora mutantur!*

Dans ces derniers temps et depuis que par ses soins les fonds, que la Société des Sciences doit à la munificence de particuliers vivement intéressés aux progrès des sciences, se trouvent être considérablement augmentés, elle s'est vue à même de pouvoir employer une partie de ses épargnes à encourager et à récompenser plus efficacement de jeunes savans, mais surtout à faire naître des ouvrages scientifiques plus considérables. Quand même l'utilité de ces secours ne serait pas toujours assez appréciée par la jeune génération qui en a été l'objet, la Société des Sciences n'en persistera pas moins à regarder un tel emploi de ses moyens, à mesure de leur augmentation successive, comme un vaste champ d'opération, peut-être même l'un des plus fertiles qui restent encore à exploiter pour les Sociétés Savantes de nos jours, où les ouvrages périodiques, les revues et les mémoires de tous genres semblent avoir pris à tâche l'espèce d'activité que jadis on avait principalement eu en vue lors de l'institution de ces sortes de Sociétés.

Après avoir fait cet historique des legs qui ont principalement contribué à assurer les conditions indispensables de l'activité de la Société des Sciences, la reconnaissance exige que nous disions aussi que l'un de ses anciens membres honoraires, M. *Pehr Tham* de Dagsnäs, de son vivant, a secondé par des contributions pécuniaires plus ou moins considérables la publication des Acta Societatis, et qu'il a même payé les frais des tables qui les accompagnent. Le témoignage le plus récent que la Société ait éprouvé de la bienveillance de ses concitoyens date de l'année 1829, témoignage dont le souvenir lui est d'autant plus précieux qu'il eut lieu peu de temps après la célébration du centième anniversaire de sa fondation, le 21 Novembre 1828. Par suite du testament que feu M. le Secrétaire d'Etat *E. Bergstedt*, guidé par une ancienne amitié héréditaire pour Upsal, avait fait dresser, il est échu à l'Université un legs de 6000 Rdr de Banque dont la Faculté de Philosophie et la Société des Sciences se partagent alternativement le droit de distribuer les intérêts annuels (300 Rdr de Banque) à des naturalistes, principalement à ceux qui se vouent à l'étude de la Géologie et de la Chimie. La Société des Sciences a déjà eu trois fois l'occasion de distribuer ce secours assez considérable, la première fois en 1840 à deux agrégés de l'Université, Mrs. *A. J. Ångström* et *J. L. Samzelius*, la moitié à chacun; la seconde fois à Mr. *J. P. Arrhenius*, agrégé; et la troisième fois, cette anné-ci, à M. *G. Marklin*, Adjoint actuel de la Société, comme un encouragement pour la continuation et la classification des recherches laborieuses dont il s'occupe depuis nombre d'années sur les couches contenant des pétrifications qu'on trouve dans l'île de Gothland et en Scanie.

Nous terminons ici ce rapport, tel qu'il a pu être fait en cette occasion et dans un espace de temps limité, laissant du reste aux 22 volumes des Mémoires anciens et nouveaux de la Société, qui ce trouvent entre les mains du public savant, à porter témoignage de la manière dont elle s'est acquittée de ses engagemens relativement aux branches

scientifiques que préférablement elle a pris à tâche de soigner et de seconder. Quant à la Société, elle aime à se rappeler ici les paroles d'un auteur distingué, prononcées à l'occasion d'une fête mémorable dans l'une des Sociétés savantes de la patrie: "On jouit ordinairement dans la société des fruits de la culture des sciences, sans se rendre compte des peines que celle-ci a dû couter au cultivateur, ou du moins sans vouer à ses peines une attention reconnaissante. Aussi est-ce rarement qu'elles se manifestent par des effets soudains et étonnans. Mais c'est pourtant à elles qu'on doit tout ce qui a été donné de moyens de bien-être, d'aisance et de sécurité aux peuples qui s'avancent dans la carrière de la civilisation; en un mot tous les avantages à l'aide desquels nos neveux, avec moins de peines que celles qu'ont eu à combattre leurs pères, pourront satisfaire les besoins les plus nobles de l'humanité, et les désirs différens des âmes éclairées" *).

---

Nous dirons enfin que, conformément à une addition aux Statuts de la Société des Sciences en date du 22 Dec. 1831, sanctionnée dernièrement par Sa Majesté le Roi, le nombre des membres actuels de la Société a été fixé à 36, outre le Secrétaire, et que ceux-ci ont été divisés en trois classes ou sections, savoir la section Physico-Mathématique, la section d'Histoire naturelle et de Médecine, et celle d'Archéologie et d'Histoire.

---

*) *"Den vetenskapliga odlingens frukter njntas vanligen i det allmänna samhällslifvet utan kännedom af odlarens mödor eller utan taeksam uppmärksamhet på dem. De uppenbara sig ock sällan i hastiga och förvånande verkningar. Men ifrån dem härleder sig likväl allt hvad ett på civilisationens bana framskridande folk ernått af medel till trefnad, välstånd och trygghet; allt, hvarigenom dess yngre slägten kunna, med färre svårigheter, än dem, som deras förfäder haft att bekämpa, tillfredsställa menskighetens ädlare behof och bildade sinnens vexlande önskningar."* — *H. Järta*, Discours à la célébration du centième anniversaire de la fondation de l'Académie des Sciences de Stockholm, en 1839.

La Société des Sciences compte aujourd'hui 10 membres honoraires, 33 membres actifs, 33 membres étrangers, 17 correspondans et un adjoint, qui est en même temps conservateur du Musée et de la Bibliothèque de la Société [18]). Un Règlement relatif à l'élection des membres a été approuvé et adopté sous le 27 Mai 1843.

Les changemens arrivés pendant le cours de l'année qui vient de s'écouler, parmi les membres-gérants de la Société, sont: 1:o que Mr. *Jöns Svanberg*, aujourd'hui le plus ancien des membres, ayant quitté l'Université en qualité de Professeur émérite, a déposé en même temps sa charge de secrétaire, et a été remplacé par notre célèbre Botaniste Mr. le Professeur *Elias Fries*, qui y a été appelé à la pluralité des voix; 2:o que Mr. le Professeur *J. E. Boëthius* s'est chargé, comme trésorier, du soin des affaires économiques de la Société; et 3:o que la place qui se trouvait vacante dans l'Inspectura, par la retraite de Mr. de *Rabenius*, a été occupée par Mr. le Baron *Gyllenstjerna*.

Les personnes et les sociétés savantes qui, pendant le cours de l'année, ont honoré la Société des Sciences de dons consistant en livres et en écrits périodiques sont: S. M. le Roi de Hollande, l'Académie Impériale des Sciences de St. Pétersbourg, l'Académie Royale des Sciences de Berlin, la Société Royale des Sciences de Copenhague, the Royal Society de Londres, la Société Royale des Sciences de Goettingue, the American Philosophical Society de Philadelphie, la Société d'Histoire Naturelle de Lyon, les Riunione degli Scienziati Italiani de Pise et de Florence, S. E. M. le Général Comte de *Löwenhjelm* à Paris, M. le Chevalier *J. Gråberg* de Hemsö, à Florence, ci-devant Consul Général de Suède à Tanger, M. le Professeur *Eschricht* à Copenhague, M. le Professeur *Hausmann* à Goettingue, etc etc., dont les noms se trouvent inscrits sur une liste particulière dans le journal de la Société des Sciences.

Le douzième volume des nouveaux Mémoires de la Société des Sci-

ences, divisé en deux sections, (56 feuilles in-quarto avec trois tables) a quitté la presse cette année, et la Société des Sciences a déjà eu, au mois de Juin dernier, l'honneur d'en présenter des exemplaires à Sa Majesté le Roi, son auguste Protecteur, et à son *Præses Illustris*, Son Altesse Royale le Duc d'Upland. Ce volume contient des traités composés par des membres de la Société, savoir: Messieurs *Tornberg*, *Romanson*, *Bergstrand*, *Malmstén* et *Schröder*; ainsi que deux traités, récompensés par la Société des Sciences, composés par Messieurs *Björling* et *J. Ångström*.

Les décès arrivés pendant le cours de cette année, parmi les membres de la Société des Sciences, sont: celui de M. l'Archiatre *P. von Afzelius*, et de S. E. M. le Grand-Maréchal, Comte *Magnus Brahe*, membres honoraires; celui de M. *G. G. Hällström*, Professeur de Physique à l'Université de Helsingfors, membre étranger, et de M. *H. E. Weyers* Professeur des Langues orientales de l'Université de Leyde, correspondant étranger.

# *Notes.*

1) *E. Prosperin*, Discours en déposant les fouctions de Président de l'Académie Royale des Sciences de Stockholm, en 1789. Une traduction latine, en abregé, de *J. A. Lindblom* en est insérée dans le V:me Volume des Nova Acta Reg. Societatis Scientiar. Upsal. 1792.

2) Les quatre sections du *Dædalus Hyperboreus* pour l'année 1716 sont précédées d'un même titre et d'une dédicace à CHARLES XII, dans laquelle on loue surtout la protection du roi pour les études mathématiques. On peut voir la lettre mémorable d'*Em. Svedenborg* à l'éditeur de l'Histoire de CHARLES XII, le Docteur *J. A. Nordberg*, où il est dit de ce roi "que, s'il avait plu à la Providence Divine de Lui laisser gouverner en paix et tranquillité Son royaume, Il aurait probablement porté les études et les sciences à un plus haut degré et à un état plus florissant qu'à aucune autre époque dans le royaume de Suède." (Hist. de CHARLES XII. Tome II, p. 399).

3) Par une des lettres de *Linné* à M. *Wargentin* on voit que ce fut proprement M. *Triewald* qui, le premier, souleva la question de l'établissement de l'Académie des Sciences à Stockholm, son projet d'y transférer la Société des Sciences d'Upsal n'ayant pu être agréé. Il s'entretint d'abord avec *Linné* de la manière dont devait être établie dans la capitale une telle société "qui ne traiterait que des sujets économiques et pratiques, et cela dans la langue du pays; car il (Triewald) n'avait pas étudié et n'était par conséquent pas content de la Société des Sciences d'Upsal, quoiqu'il en fût membre, et il blâmait hautement l'insertion d'anciens diplomes, de bulles papales et de sujets philologiques dans les Actes de la Société." (*H. Järta*, Discours dans l'Acad. Royale des Scienees de Stockholm 1839 p. 38).

4) La première séance régulière eut lieu le 26 Nov. 1719, et depuis ce temps il se trouve des journaux complets et des procès verbaux plus ou moins détaillés dans les Archives de la Société Royale des Sciences.

5) Les annotations en guise de journal montrent comment dans ce temps-là, faute de fonds pour payer l'impression, la Société des Sciences ne put souvent donner à ses travaux l'extension qu'elle aurait souhaité. Ainsi, dans le procès verbal du 25 Avr. 1730, au sujet d'une dissertation de *C. Linnæus*: de nuptiis et sexu Plantarum, il est noté que la Société des Sciences "désirait qu'elle pût être imprimée." Le manuscrit, longtemps regardé comme perdu, a été retrouvé il y a quelques années, et donné par le Premier Médecin du Roi, Mr. *P. von Afzelius*, à la Bibliothèque de l'Académie d'Upsal.

6) Lorsque, dans la séance de la Société des Sciences du 18 Août 1727, Mr. l'Evêque *E. Benzelius* lui fit ses adieux, il est dit dans le procès verbal: "que la Société des Sciences promettait de n'oublier jamais que c'était à Mr. l'Evêque, immédiatement après l'Auguste Souverain, que la Société devait attribuer, comme à son premier fondateur, tous les avantages et progrès qu'elle avait déjà pu faire ou ferait par la suite."

7) M. *Wargentin* publia, sous les auspices de M. *A. Celsius*, à Upsal en 1741 sa première dissertation de Satellitibus Jovis. La même année, il présenta à la Société des Sciences ses Tabulæ pro calculandis Eclipsibus Satellitum Jovis ad meridianum observatorii Upsaliensis. En 1743 il fut créé Maître-ès-arts en Philosophie. En 1746 il fut nommé Agrégé en Astronomie, et Adjoint en 1748. Lors du décès prématuré de *P. Elvius*, il devint Secrétaire de l'Académie des Sciences à Stockholm. Fidèle à ses premières affections, il continua à enrichir les Actes de la Société des Sciences de ses dissertations. Observationes Eclipsium tertii Satellitis Jovis, les dernières de sa main, sont insérées dans le IV:me Tome des Actes de la Société des Sciences, qui parut en 1784.

8) Les Statuts Royaux pour la Société des Sciences de l'année 1728 furent imprimés parmi les Acta publica, et ont aussi, par cette raison, trouvé une place dans l'Oeuvre de *Modée*, Tom. I. La Société des Sciences ayant ainsi obtenu la sanction royale, les Cours administratives recoururent souvent à elle sur divers points, et le Collége Royal de la Chancellerie lui demanda, relativement à certains faits publics, des projets d'inscriptions et d'emblèmes pour des médailles, ce dont, après l'établissement des Académies des Sciences et des Belles Lettres à Stockholm, il ne fut plus question.

9) Ce premier et unique revenu de quelque importance provint de l'enlèvement d'anciens tuyaux de fer, qui étaient des restes d'un aqueduc construit anciennement entre la rivière Fyris-å et le Château royal et qui par suite de l'incendie de 1702 se trouva hors d'usage. (cfr. la correspondance de *Benzelius*, préface, p. XXIV).

10) Le manuscrit autographe de *Rudbeck* du Thesaurus Linguar. Harmonicus, en X gros volumes in 4:o, est conservé dans la Bibliothèque de l'Académie d'Upsal. Il n'en a été imprimé qu'un Prodromus de 16 pages s. l. e. a. in 4:to. Dans le prot. de la Société des Sciences du 14 Juin 1722 il est fait mention du Dictionnaire Etymologique du Senateur Baron *B. Skytte* comme ayant été récemment retrouvé, et dans le prot. du 12 Févr. 1739 *Er. Benzelius* rapporte qu'il se trouve dans la Bibliothèque du Gymnase de Linköping.

11) Les premiers essais d'*Ol. Celsius* l'aîné pour son Hiero-Botanicon, ainsi que ses recherches critiques et celles de *Geo. Wallin* pour servir à la Runographie Septentrionale, occupent une place distinguée dans les anciens Mémoires de la Société des Sciences. De même celles de *Fale Burman* (Triga supplementorum ad Runographiam Svio-Gothicam, una cum prooemio de præsenti ejus facie), dans le Vme Tome des Nova Acta R. Societ. Scient. Upsal.

12) Déjà dans la séance de la Société des Sciences du 27 Sept. 1730, le Prof. *E. Alstrin* fit lecture de son "projet pour la composition d'un Dictionnaire Suédois." La Société des Sciences jugea cependant à propos, lors de la discussion sur ce sujet le 28 Janv. 1731, de travailler d'abord à l'Orthographe. En consequence M. *Alstrin* rédigea ses observations sur l'Orthographe de la langue Suédoise, qui furent lues dans la séance de la Société des Sciences du 26 Nov. 1733. Voyez le procès verbal du même jour. Elles furent imprimées depuis dans un appendice aux observations de M. *A. Sahlstedt* sur la langue Suédoise, Sthm. 1735.

13) Pour la publication du Glossarium Sveogothicum, M. *Ihre* reçut, à la diète de 1736, "une forte subvention" et pour récompenser ses labeurs "un cadeau honorable" de 10,000 Dal. monaie d'argent. Le travail ayant été retardé, les Etats de l'année 1765, qui étaient moins favorables à cette entreprise, voulurent exiger le remboursement de cette somme. L'ancien Collége de la Chancellerie eut besoin de toute son autorité pour détourner l'orage qui menaçait le savant auteur. Dans le mémoire bien redigé du Collége il est dit, entr'autres: "Un auteur ne doit pas avoir pour but principal de produire rapidement, mais de travailler solidement et bien. Lorsque le sujet est important, l'honneur de la Nation, tout comme le sien, en dépend. L'ou-

vrage de M. *Ihre* était de telle nature que, s'il y avait un sujet réclamant des lectures étendues avec un travail assidu et une mûre critique c'était celui-là. Par-là seulement il pourrait atteindre la perfection qu'attendaient le public et les Etats généraux." — L'observation faite n'eut pas de suite.

14) Lorsque le manuscrit de la Géographie de *Tuneld* fut présenté pour la première fois, dans la séance de la Société des Sciences du 28 Nov. 1739, la Société y trouva différentes imperfections, ce qui engagea l'auteur à communiquer, d'après le conseil d'*A. Celsius*, son ouvrage à toutes les Nations d'étudians à l'Université d'Upsal, afin de recueillir des additions et des corrections; après quoi quelques uns des membres de la Société des Sciences ayant également revu l'ouvrage, la Société accorda son approbation. Le manuscrit ainsi corrigé est conservé dans la Bibliothèque du Gymnase de Linköping.

15) *Ol. Celsius* fils, *Eberh. Rosén* (Rosenblad), *B. Frondin* et autres furent choisis pour Adjoints, *S. Bring* (Lagerbring) à Lund, *S. Hof* à Skara, *H. J. Sivers* à Norrköping, et autres pour Correspondans, *Gronovius* à Leyde, *Jussieu* et *Clairaut* à Paris, *Alex. Monro* à Edinbourg, *A. de Haller* à Gottingue, et autres pour Membres étrangers. Le Major-Général Comte *Axel Oxenstjerna* à Tidön, grand protecteur de l'Astronomie, fut choisi pour Membre Honoraire.

16) Lorsque le Libraire de l'Académie *M. Swederus*, qui s'était chargé de la publication des Nova Acta, eut abandonné en 1789 sa librairie, la Société des Sciences l'ayant en vain offerte par des annonces dans les Journaux publics à des éditeurs indigènes, elle négocia, par l'entremise de son membre actif *Ad. Murray*, avec la Librairie de *Müller* à Leipzic, qui se declara disposée non seulement à acheter les 4 Tomes déjà publiés, mais encore à payer, comme éditeur du 5:me, un honoraire d'un ducat pour chaque feuille. Mais une défense émanée durant l'époque, dite de la Liberté (voyez la publication du Collège de la Chancellerie du 6 Sept. 1748) s'opposant à la conclusion de cette négociation, la Société des Sciences résolut de solliciter très-humblement, par l'organe de son *Præses Illustris*, auprès du Roi la permission de faire imprimer ses Actes à l'étranger. S. M. daigna considérer avec bienveillance la publication des Actes de la Société des Sciences, mais déclara cependant "qu'il serait plus convenable et plus honorable pour la Nation, si cette publication pouvait avoir lieu dans la Suède." (Prot. du 10 Juin 1791). — Il ne fut pourtant question d'aucun secours. Après assez de peine et de dépenses, le Tome V:me parut déjà avant la fin de 1792, aux propres frais de la Société des Sciences.

17) Par lettres de donation commune du 18 Mai 1785, Mrs. *Ziervogel* et *J. A. Gyllenhaal* avaient cédé à la Société Royale des Sciences, le premier: toute sa Collection d'objets d'histoire naturelle et toute la partie de sa Bibliothèque qui avait rapport à cette science, et le derniere: une somme de 3,000 Rixdaler Spécies ou 54,000 Daler en monaie de cuivre, conjointement avec une Collection d'histoire naturelle et de livres, pour être réunie à celle de M. *Ziervogel.* Après la mort de *Gyllenhaal*, M. *Ziervogel* mit à exécution le testament commun, par le moyen d'une obligation émise en date du 19 Janv. 1789. Lors de l'exécution définitive de ces testamens, les héritiers des testateurs rivalisèrent autant qu'il fut en leur pouvoir de zèle et générosité, de sorte que ces donations reçurent un accroissement important, tant pour les fonds que pour les collections.

18) Membres honoraires de la Société des Sciences en 1844: S. E. le Comte de *Rosenblad*, Mrs. *Järta*, le Baron *de Brinkman*, le Baron *D'Ohsson*, *Tegnér*, S. E. le Comte *de Trolle-Wachtmeister*, S. E. le Comte *G. de Löwenhjelm*, *Franzén*, *Wingård*, S. E. le Baron *d'Ihre*. — Membres actuels: Mrs. *Jöns Svanberg*, *Gråberg* de Hemsö, le Baron *de Berzelius*, *Bredman*, *Geijer*, *Lagerhjelm*, *Wahlenberg*, *Cronstrand*, *Agardh*, *Hansteen*, *Walmstedt*, *Romanson*, *Schröder*, *Rabenius*, *Hwasser*, *Fries*, *Hisinger*, *Ekström*, *Ad. Svanberg*, *Sefström*, *A. Retzius*, *Hedenborg*, *Schönherr*, *Nilsson*, le Baron *de Gyllenstierna*, *Læstadius*, *Tornberg*, *G. Svanberg*, *Malmstén*, *Bergstrand*, *Boëthius*, le Baron *de Beskow*, *Reuterdahl*, le Baron *de Wrede*, *Selander*. Adjoint et Conservateur du Musée M. *Marklin*. — Membres étrangers: Mrs. *Gadolin*, *Fabre*, *Lobo da Silveyra*, *Frähn*, *Steffens*, *Arago*, *Alex. von Humboldt*, *Fuss*, *Poisson*, *Gay-Lussac*, *Bessel*, *Biot*, *L. von Buch*, *R. Brown*, *Krukenberg*, *J. Grimm*, *Werlauff*, *J. Müller*, S. E. le Cardinal *Angelo Mai*, *C. Lucien Bonaparte*, Prince de Canino et Musignano, *Schultén*, *Schumacher*, *Encke*, *Temminck*, *Boeckh*, *Örsted*, *Schouw*, *E. Quatremère*, *Gauss*, *Fischer*, *Andral*, *D. W. Koch*, *Eschricht*, *Letronne*, *Raoul-Rochette*. — Correspondans: Mrs. *Rafn*, *Gretsch*, *Mainardi*, *Littrow*, *Poggendorff*, *Nordenskiöld*, *Forchhammer*, *W. Weber*, *Ilmoni*, *Haeser*, *Sommer*, *Blytt*, *Kröijer*, *Schlechtendahl*, *C. Holmboe*, *Finn Magnusen*.

# OBSERVATIONS SUR LA TRANSFORMATION DES INTÉGRALES MULTIPLES

PAR

**A. F. SVANBERG.**

Dans les transformations des intégrales multiples il y a deux espèces distinctes de difficultés, qui se présentent, dont l'une, savoir la substitution à faire pour le produit des différentielles, a depuis longtems été considérée; l'autre relative aux limites, n'ayant jamais été bien discutée, féra l'objet du mémoire présent. En examinant une intégrale multiple, prise entre des limites constantes et finies, on trouve, qu'elle ne peut pas en général après sa transformation être représentée par une seule autre, mais que pour une intégrale double p. e. il en faut quatre, prises entre des limites différentes, pour réproduire la valeur de la proposée. La matière étant abstraite, il nous semble bon d'aborder la question par des considérations géométriques, qui féront voir au lecteur au premier coup d'oeil les difficultés nouvelles et le chemin, qu'il lui faut suivre pour les surmonter. La transformation des intégrales multiples d'un nombre quelconque de variables, prises entre des limites con-

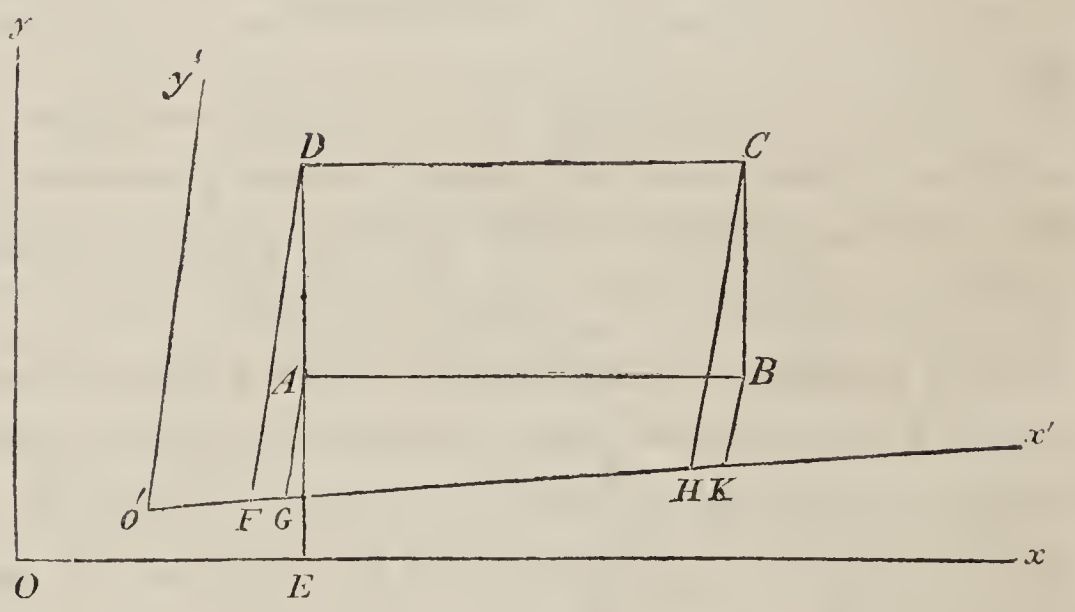
stantes et finies; se faisant d'une manière parfaitement semblable à celle des intégrales doubles, nous ne croyons pas nécessaire d'y faire application spéciale.

§. 1.

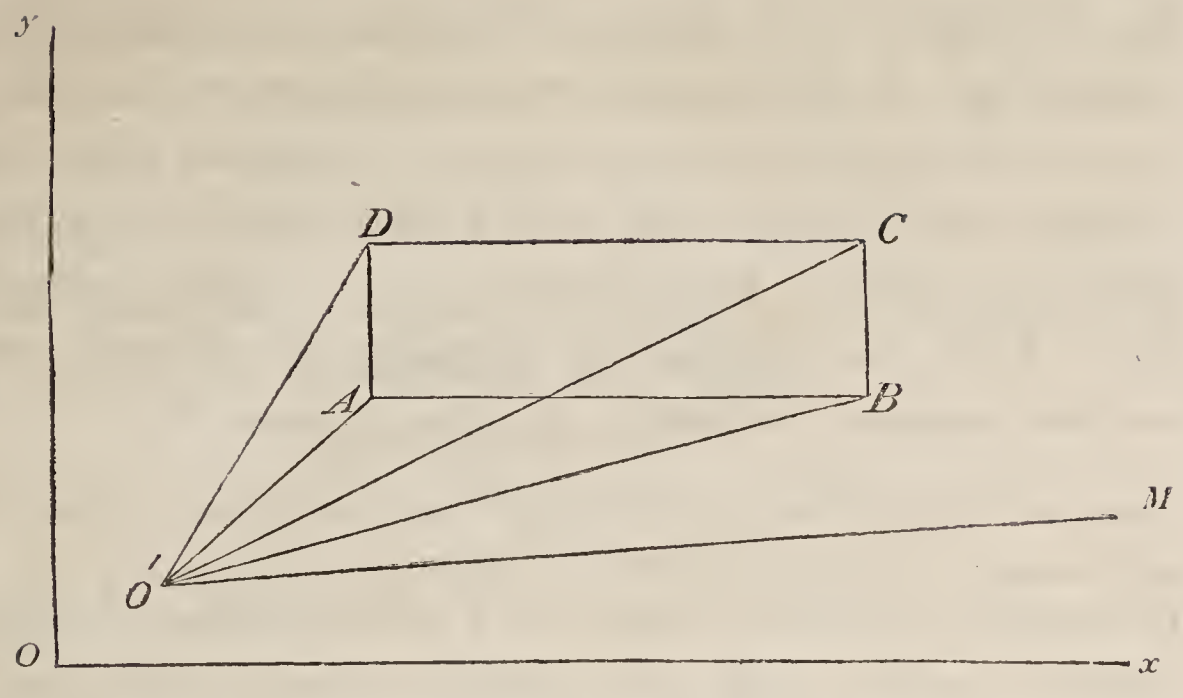
Soit

$$u = \int_{x=\alpha}^{x=a} \int_{y=\beta}^{y=b} f(x, y)\, dx\, dy ;$$

$u$ sera une somme relative à tous les élémens infiniment petits $dxdy$ de l'aire du rectangle $ABCD$




dont les cotés sont paralléles aux axes des coordonnées rectangulaires $x$, $y$ et $OE=\alpha$, $EA=\beta$, $AB=a-\alpha$, $AD=b-\beta$. En transformant les coordonnées $x, y$ en d'autres $x', y'$ dont l'origine soit $O'$, pour obtenir la même somme, il faudra étendre les intégrations à l'aire $CHKB$ plus à $DFHC$ moins à $DFGA$ moins à $AGKB$. En changeant les coordonnées rectangulaires en polaires $r$ et $\varphi$




et prenant $O'$ pour la nouvelle origine, $O'M$ pour la ligne droite à laquelle se rapporte l'angle $\varphi$, les doubles intégrations par rapport aux nouvelles variables $r$ et $\varphi$ doivent s'étendre séparément aux élémens $r\,dr\,d\varphi$ de tous les triangles $BO'C$, $CO'D$, $DO'A$, $AO'B$ où l'on devroit ensuite prendre la somme des deux premières intégrales moins la somme des deux autres. Si $O'$ est situé sur un des cotés du rectangle $ABCD$, une des intégrales s'évanouit, s'il est situé dans un des quatre coins, deux s'évanouiront. On voit donc, qu'une intégrale double, prise entre des limites constantes et finies, dépendra en général des quatre autres, qu'on pourra tout au plus réduire à deux en choisissant convenablement la nouvelle origine.

## §. 2.

Si l'on veut trouver sans des considérations géométriques à ce que équivaut une intégrale double après la transformation

des variables, celà sera aisé à présent, guidés que nous sommes par ce qui précède. Ainsi l'intégrale étant une somme, où les variables sous le signe $\iint$ changent d'une manière continue relativement aux limites dans chaque intégration, se composera après la transformation d'un nombre d'intégrales égal à celui des solutions de continuité relativement aux limites des nouvelles variables. De plus à cause de

$$\int_{x=a}^{x=a} = \int_{x=h}^{x=a} - \int_{x=h}^{x=a};$$

en prenant $h$ pour la valeur de $x$ correspondante à la nouvelle origine, on voit, qu'il sera permis à prendre zéro pour la limite inférieure dans l'intégration, rapportée aux nouvelles variables, par laquelle on commence. Alors aussi il faudra remplacer cette intégrale par la différence de deux autres, prises depuis zéro jusqu'aux valeurs correspondantes à $x=a$ et $x=a$

De même, on a

$$\int_{y=\beta}^{y=b} = \int_{y=k}^{y=b} - \int_{y=k}^{y=\beta},$$

où l'on pourra prendre $k$ pour la valeur de $y$ correspondante à la nouvelle origine. Si le point $h$, $k$ satisfait à une quelconque des équations $x=a$, $x=\alpha$, $y=b$ on $y=\beta$, une des intégrales précédentes s'évanouira d'elle même; s'il satisfait à deux des équations, deux intégrales disparaitront.

Soit pour fixer les idées $r$, $s$ les nouvelles variables et

$$x = h + f(r, s), \qquad y = k + F(r, s),$$

où $f(r, s)$ et $F(r, s)$ s'évanouissent en faisant $r=o$ et $s=o$. Supposons aussi que $r$ soit la variable, par laquelle on veut com-

mencer l'intégration; $u$ dépendra après la transformation de quatre intégrales, que nous nommerons $A$, $B$, $C$, $D$ de manière, que nous aurons

$$u = A + B - C - D.$$

Les limites de $A$ seront, par rapport à $r$, $r=o$ et $r=$ la valeur obtenue pàr la résolution de l'équation

$$a = h + f(r, s).$$

La limite inférieure par rapport à $s$ s'obtient par la résolution de l'équation résultante de l'élimination de $r$ entre les équations

$$a = h + f(r, s), \qquad \beta = k + F(r, s);$$

la limite supérieure après l'élimination de $r$ entre les équations

$$a = h + f(r, s), \qquad b = k + F(r, s).$$

Pour $B$ les limites seront $r=o$ et $r=$ la racine de l'équation

$$b = k + F(r, s);$$

la limite inférieure de $s$ s'obtient après avoir éliminé $r$ entre les deux équations

$$b = k + F(r, s), \qquad a = h + f(r, s);$$

pour la limite supérieure on doit éliminer $r$ entre les équations

$$b = k + F(r, s), \qquad a = h + f(r, s).$$

Quant au $C$ on a les limites $r=o$ et $r=$ la racine de l'équation

$$a = h + f(r, s).$$

Pour la seconde intégration relative à $s$, la limite inférieure est determinée par les équations

$$a = h + f(r, s), \qquad \beta = k + F(r, s);$$

la limite supérieure par les deux autres

$$a = h + f(r, s), \qquad b = k + F(r, s).$$

De même on a pour $D$, dans l'intégration par rapport à $r$, les limites $r=o$ et $r=$ la racine de l'équation

$$\beta = k + F(r, s).$$

Pour la seconde intégration, la limite inférieure de $s$ sera déterminée par

$$\beta = k + F(r, s), \qquad \alpha = h + f(r, s);$$

la limite supérieure par les équations

$$\beta = k + F(r, s), \qquad \alpha = h + f(r, s).$$

## §. 3.

Pour faire application des formules données, nous poserons

$$A = \int_0^a e^{-x} x^{m-1} dx, \qquad B = \int_0^b e^{-y} y^{-m} dy,$$

$$u = AB = \iint e^{-x-y} x^{m-1} y^{-m} dx\, dy.$$

En y faisant

$$x = \frac{r}{1+s}, \quad y = \frac{rs}{1+s}, \quad dx\, dy = \frac{r\, dr\, ds}{(1+s)^2},$$

il vient

$$AB = \int_{r=0}^{a(1+s)} \int_{s=0}^{\frac{b}{a}} e^{-r} dr. \frac{s^{-m} ds}{1+s} + \int_{r=0}^{\frac{b(1+s)}{s}} \int_{s=\frac{b}{a}}^{s=\infty} e^{-r} dr. \frac{s^{-m} ds}{1+s},$$

ou bien en mettant $\frac{1}{s}$ au lieu de $s$ dans la seconde intégrale

$$AB = \int_{r=0}^{a(1+s)} \int_{s=0}^{\frac{b}{a}} e^{-r} dr. \frac{s^{-m} ds}{1+s} + \int_{r=0}^{b(1+s)} \int_{s=0}^{\frac{a}{b}} e^{-r} dr. \frac{s^{m-1} ds}{1+s}.$$

En effectuant l'intégration par rapport à $r$ et faisant $b = \mu a$, la formule précédente donne

$$A\,B = \int_0^{\mu} \left(1-e^{-a(1+s)}\right)\frac{s^{-m}ds}{1+s} + \int_0^{\frac{1}{\mu}} \left(1-e^{-\mu a(1+s)}\right)\frac{s^{m-1}ds}{1+s}.$$

Dans le cas de $a=\infty$, on auroit

$$A = \Gamma(m)\,, \quad B = \Gamma(1-m)\,, \quad A\,B = \frac{\pi}{\operatorname{Sin} m\pi},$$

$$\frac{\pi}{\operatorname{Sin} m\pi} = \int_0^{\mu} \frac{s^{-m}ds}{1+s} + \int_0^{\frac{1}{\mu}} \frac{s^{m-1}ds}{1+s},$$

laquelle valeur substituée dans la formule précédente donne

$$\int_0^{\mu} e^{-a(1+s)}\cdot\frac{s^{-m}ds}{1+s} + \int_0^{\frac{1}{\mu}} e^{-\mu a(1+s)}\cdot\frac{s^{m-1}ds}{1+s} = \frac{\pi}{\operatorname{Sin} m\pi} - \int_0^{a} x^{m-1}e^{-x}dx \int_0^{\mu a} e^{-x}x^{-m}dx.$$

## §. 4.

Supposons encore

$$A = \int_0^{\infty} dx\,.\,e^{-x^2}\operatorname{Sin} mx, \qquad B = \int_0^{\infty} e^{-y^2}dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

$$A\,\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \iint e^{-x^2-y^2}\operatorname{Sin} mx\,.\,dx\,dy$$

et faisons

$$x = r\operatorname{Cos}\varphi\,, \qquad y = r\operatorname{Sin}\varphi\,, \qquad dx\,dy = r dr\,d\varphi.$$

Cela donnera

$$A\,\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \int_{r=0}^{r=\infty}\int_{\varphi=0}^{\varphi=\frac{\pi}{2}} e^{-r^2}\operatorname{Sin}(mr\operatorname{Cos}\varphi)\,r dr\,d\varphi.$$

Mais on a d'après une formule donnée par Laplace

$$\int_0^{\infty} e^{-r^2}\operatorname{Cos} nr\,.\,dr = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,e^{-\frac{n^2}{4}},$$

laquelle différentiée par rapport à $n$ donne

$$\int_0^\infty e^{-r^2}\operatorname{Sin} nr \,.\, r\,dr = \frac{\sqrt{\pi}}{4}\,.\, n\, e^{-\frac{n^2}{4}}\,.$$

Par conséquent

$$A\,\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{\sqrt{\pi}}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} m\, e^{-\frac{m^2\operatorname{Cos}^2\varphi}{4}}\operatorname{Cos}\varphi\,.\,d\varphi\,,$$

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{m}{2}\, e^{-\frac{m^2\operatorname{Cos}^2\varphi}{4}}\operatorname{Cos}\varphi\,.\,d\varphi\,,$$

et, en faisant

$$\frac{m}{2}\operatorname{Sin}\varphi = \theta\,,$$

$$A = \int_0^\infty e^{-x^2}\operatorname{Sin} mx\,.\,dx = e^{-\frac{m^2}{4}}\int_0^{\frac{m}{2}} e^{\theta^2}\,.\,d\theta\,.$$

## §. 5.

Considérons les intégrales

$$A = \int_0^a \frac{x^{m-1}\,dx}{1+x}\,, \qquad B = \int_0^{\mu a} \frac{y^{n-1}\,dy}{1+y}\,,$$

$$AB = \iint \frac{x^{m-1}\,y^{n-1}\,dx\,dy}{(1+x)(1+y)}\,.$$

En faisant

$$x = r\,, \qquad y = rs\,, \qquad dx\,dy = r\,dr\,ds$$

il vient

$$(1)\ldots\ldots AB = \int_{r=0}^{a}\int_{s=0}^{\mu} \frac{r^{m+n-1}\,s^{n-1}\,dr\,ds}{(1+r)(1+rs)} + \int_{r=0}^{\frac{\mu a}{s}}\int_{s=\mu}^{\infty} \frac{r^{m+n-1}\,s^{n-1}\,dr\,ds}{(1+r)(1+rs)}\,.$$

Dans le cas de $m+n=1$ cette formule donne, après l'avoir intégrée par rapport à $r$,

$$\int_0^a \frac{x^{m-1}dx}{1+x} \int_0^{\mu a} \frac{x^{-m}dx}{1+x} =$$

$$\int_0^{\mu} \frac{s^{-m}\log(\frac{1+a}{1+as})ds}{1-s} + \int_{\mu}^{\infty} \frac{s^{-m}\log(\frac{1+\mu a}{s(1+\mu a)})\,ds}{1-s} =$$

$$(2) \ldots \int_0^{\mu} \frac{s^{-m}\log(\frac{1+a}{1+as})ds}{1-s} + \int_0^{\frac{1}{\mu}} \frac{s^{m-1}\log(\frac{1+\mu a}{1+\mu as})\,ds}{1-s} .$$

$\mu = \infty$ donne

$$(3) \ldots \int_0^{\infty} \frac{s^{-m}\log(\frac{1+a}{1+as})\,ds}{1-s} = \frac{\pi}{\mathrm{Sin}\, m\pi} \int_0^a \frac{x^{m-1}dx}{1+x} .$$

Cette formule sera aisée à vérifier, en partant de

$$\int_0^{\infty} \frac{s^{-m}ds}{1+s} = \frac{\pi}{\mathrm{Sin}\, m\pi} ,$$

laquelle donne, après avoir mis $as$ au lieu de $s$,

$$\int_0^{\infty} \frac{s^{-m}ds}{1+as} = \frac{\pi}{\mathrm{Sin}\, m\pi} \cdot a^{m-1} ;$$

en multipliant cette dernière par $\frac{da}{1+a}$ et l'intégrant de manière qu'il s'évanouisse avec $a$, on obtient la formule (3). En $y$ faisant $a = \infty$, il vient

$$(4) \ldots \int_0^{\infty} \frac{s^{-m}\log s\,.\,ds}{s-1} = \left(\frac{\pi}{\mathrm{Sin}\, m\pi}\right)^2 .$$

Si l'on fait $a = \infty$ dans (2), on obtient la formule plus générale

$$\int_0^{\mu} \frac{s^{-m}\log s\,.\,ds}{s-1} + \int_0^{\frac{1}{\mu}} \frac{s^{m-1}\log s\,.\,ds}{s-1} = \left(\frac{\pi}{\mathrm{Sin}\, m\pi}\right)^2 .$$

Soit dans (1) $a = \mu = \infty$, ce qui fait disparaître la seconde intégrale, et $m + n < 1$, nous aurons

$$\frac{r^{m+n-1}}{(1+r)(1+rs)} = \frac{1}{1-s}\,\frac{r^{m+n-1}}{1+r} - \frac{s}{1-s}\cdot\frac{r^{m+n-1}}{1+rs},$$

laquelle multipliée par $dr$ et intégrée entre les limites $o$ et $\infty$ donne

$$\int_o^\infty \frac{r^{m+n-1}\,dr}{(1+r)(1+rs)} = \frac{1-s^{1-m-n}}{1-s}\cdot\frac{\pi}{\mathrm{Sin}(m+n)\pi}$$

et delà, à cause de

$$A = \frac{\pi}{\mathrm{Sin}\,m\pi}, \qquad B = \frac{\pi}{\mathrm{Sin}\,n\pi},$$

l'équation (1) donnera

$$\int_o^\infty \frac{s^{n-1}-s^{-m}}{1-s}\,ds = \frac{\pi\,\mathrm{Sin}\,(m+n)\pi}{\mathrm{Sin}\,m\pi\,\mathrm{Sin}\,n\pi}.$$

En différentiant cette formule par rapport à $m$ on retrouve (4). Nous n'insisterons pas davantage sur ces formules, dont la plupart était dejà connue. Elles peuvent servir comme des vérifications à nos formules générales.

## §. 6.

Soit en général

$$A = \int_o^a f(x)\,dx\,, \qquad B = \int_o^{\mu a} F(y)\,dy\,,$$

$$AB = \iint f(x)\,F(y)\,dx\,dy$$

et faisons

$$x = r\,, \quad y = rs\,, \quad dx\,dy = r\,dr\,ds\,;$$

il viendra

$$AB = \int_{r=o}^{a}\int_{s=o}^{\mu} f(r)\,F(rs)\,r\,dr\,ds + \int_{r=o}^{\frac{\mu a}{s}}\int_{s=\mu}^{\infty} f(r)\,F(rs)\,r\,dr\,ds\,.$$

La dernière de ces intégrales se transforme en

$$\int_{u=0}^{\mu a}\int_{v=0}^{\frac{1}{\mu}} f(uv)\,F(u).u\,du\,dv$$

par la supposition de $r=uv$ , $s=\frac{1}{v}$ ; et delà

$$A\,B=\int_{r=0}^{a}\int_{s=0}^{\mu} f(r)\,F(rs)\,rdr\,ds+\int_{r=0}^{\mu a}\int_{s=0}^{\frac{1}{\mu}} f(rs)\,F(r)\,rdr\,ds.$$

En prenant $a=\infty$ , on trouve

$$(5)\quad \int_{r=0}^{\infty}\int_{s=0}^{\mu} f(r)\,F(rs).\,rdr\,ds+\int_{r=0}^{\infty}\int_{s=0}^{\frac{1}{\mu}} f(rs)\,F(r)\,rdr\,ds=$$

$$=\int_{0}^{\infty} f(x)\,dx\int_{0}^{\infty} F(x)\,dx\ ,$$

et pour $F(x)=f(x)$ , en faisant pour abréger

$$\int_{r=0}^{\infty}\int_{s=0}^{\mu} f(r)f(rs)\,rdr\,ds=\varphi(\mu)\ ,$$

$$\varphi(\mu)+\varphi\left(\tfrac{1}{\mu}\right)=\left(\int_{0}^{\infty} f(x)\,dx\right)^{2},$$

formule digne d'être remarquée à cause de l'indépendance de $\mu$ dans la somme $\varphi(\mu)+\varphi\left(\frac{1}{\mu}\right)$.

## §. 7.

Faisons dans (5)

$$f(x)=\frac{\mathrm{Sin}\,mx}{h^2+x^2}\ ,\ F(x)=\frac{\mathrm{Sin}\,mx}{x}\ \text{ et }\ \mu=1\ ,$$

il viendra

$$(6)\quad \int_{r=0}^{\infty}\int_{s=0}^{1}\frac{\mathrm{Sin}\,mr\,\mathrm{Sin}\,msr}{s(h^2+r^2)}\,dr\,ds+\int_{r=0}^{\infty}\int_{s=0}^{1}\frac{\mathrm{Sin}\,msr\,\mathrm{Sin}\,mr}{h^2+r^2s^2}\,dr\,ds$$

$$=\frac{\pi}{2}\cdot\int_{0}^{\infty}\frac{\mathrm{Sin}\,mx}{h^2+x^2}\,dx\ .$$

Mais on a

$$\text{Sin } mr \text{ Sin } msr = \tfrac{1}{2} \text{Cos } mr \,.\, \overline{1-s} - \tfrac{1}{2} \text{Cos } mr \,.\, \overline{1+s}$$

et

$$\int_0^\infty \frac{\text{Cos } ax}{h^2+h^2x^2}\, dx = \frac{\pi}{2hk} \,.\, e^{-\frac{ah}{k}} ,$$

ce qui donne

$$\int_{r=0}^{\infty}\int_{s=0}^{1} \frac{\text{Sin } mr \text{ Sin } mrs}{s(h^2+r^2)}\, dr\, ds = \frac{\pi e^{-mh}}{4h}\int_0^1 \frac{ds}{s}\left(e^{mhs}-e^{-mhs}\right)$$

$$= \frac{\pi}{4h}\, e^{-mh}\int_0^{mh} \frac{ds}{s}\left(e^{s}-e^{-s}\right) ,$$

$$\int_{r=0}^{\infty}\int_{s=0}^{1} \frac{\text{Sin } mr \text{ Sin } msr}{h^2+r^2s^2}\, dr\, ds = \frac{\pi}{4h}e^{mh}\int_0^1 \frac{ds}{s}e^{-\frac{mh}{s}} - \frac{\pi}{4h}\, e^{-mh}\int_0^1 \frac{ds}{s}\, e^{-\frac{mh}{s}}$$

$$= \frac{\pi}{4h}\, e^{mh}\int_0^{mh} \frac{ds}{s}\, e^{-\frac{1}{s}} - \frac{\pi}{4h}\, e^{-mh}\int_0^{mh} \frac{ds}{s}\, e^{-\frac{1}{s}} .$$

La substitution de ces valeurs faite dans (6), nous obtenons enfin réduite aux quadratures la formule

$$\int_0^\infty \frac{\text{Sin } mx}{h^2+x^2} \,.\, dx = \frac{e^{-mh}}{2h}\int_0^{mh} \frac{ds}{s}(e^{s}-e^{-s}) + \frac{e^{mh}-e^{-mh}}{2h}\int_\infty^{mh} \frac{ds}{s}\, e^{-\frac{1}{s}} .$$

qu'on peut aussi mettre sous la forme suivante

$$\int_0^\infty \frac{\text{Sin } mx}{h^2+x^2}\, dx = \frac{e^{-mh}}{2h}\int_0^{mh} \frac{ds}{s}(e^{s}-e^{-s}) - \frac{e^{mh}-e^{-mh}}{2h}\int_\infty^{mh} \frac{ds}{s}\, e^{-s} .$$

La première intégrale du second membre équivaut à

$$-\frac{e^{-mh}}{2h}\left(\int_\infty^0 \frac{ds}{s}\, e^{-s} + \int_0^{mh} \frac{ds}{s}\, e^{-s}\right) + \frac{e^{-mh}}{2h}\left(\int_\infty^0 \frac{ds}{s}\, e^{-s} + \int_0^{-mh} \frac{ds}{s}\, e^{-s}\right),$$

ou ce qui est la même chose

$$-\frac{e^{-mh}}{2h}\int_\infty^{mh} \frac{ds}{s}\, e^{-s} + \frac{e^{-mh}}{2h}\int_\infty^{-mh} \frac{ds}{s}\, e^{-s} ,$$

au moyen de quoi nous obtenons

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{Sin}\, mx}{h^2+x^2}\, dx = \frac{e^{-mh}}{2h}\int_\infty^{-mh} \frac{ds}{s} e^{-s} - \frac{e^{mh}}{2h}\int_\infty^{mh} \frac{ds}{s} e^{-s}.$$

En faisant $e^{-s} = \theta$, et $e^{mh} = \alpha$, il vient

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{Sin}\, mx}{h^2+x^2}\, dx = \frac{e^{-mh}}{2h}\int_0^\alpha \frac{d\theta}{\log\theta} - \frac{e^{mh}}{2h}\int_0^{\frac{1}{\alpha}} \frac{d\theta}{\log\theta},$$

formule remarquable qui coïncide avec celle, qu'a donné Schlömilch (*Archiv der Mathematik und Physik* von Grunert).

328511

# CALCULI DIFFERENTIARUM FINITARUM INVERSI EXERCITATIONES.

AUCTORE

MAG. **E. G. BJÖRLING**

MATH. DOC.

## PARS II:DA.

### De Integrali $h\Sigma f_x$ secundum dignitates ipsius $h$ crescentes explicando.

Inventis in "Parte I:ma" expressionibus, in quas adhibitis mechanice solitis functiones $\frac{1}{e^x-1}$ et $\frac{1}{e^x+1}$ differentiandi regulis pervenitur, tum exposito valore quantitatis $F^{(n)}_{(o)}$ — quantitatis, inquam, quae comparatur ponendo $o$ loco $x$ in expressione, in quam adhibitis functionem $F(x)=\frac{x}{e^x-1}$ differentiandi regulis pervenitur —; in §:o 6:o generalem deduximus formam Integralis finiti $\Sigma(e^x y)$ pro $\Delta x=h$ [tali certe ut ne sit $e^h-1=o$]*) tandem-

*) Liceat nobis hoc loco iis, quae in §:is hisce 6:o et 7:o allata sunt, sequentia subjungere verba, non solum ut nemini reliquum sit dubium, an justam ibi rigoris Mathematici rationem habuerimus, sed etiam quo magis aliquanto reddatur accuratum genus nostrum in iis loquendi.

In principio §:i 7:i (pag. 331) verba "Facile patet - - - - ($h=o$ excepto)" in sequentes mutentur periodos: "In §:o praecedenti $x$ et $h$ reales esse (si placet) re-"serventur. Jam vero facile patebit valere quam comparavimus aequationem (39) $x$

que in §:o 7:o Integralis $\Sigma(e^{rx}y)$ pro $\Delta x = h$ [tali certe ut ne sit $e^{rh} - 1 = o$], $r$ denotante constantem quamlibet realem aeque ac imaginariam, $o$ excepto, atque $y$ functionem ipsius $x$ rationalem ac integram.

Quanti sit momenti innotescere valorem Integralis indefiniti $\Sigma(e^{rx}f_x)$, $r$ constante reali aut imaginariâ, nos jam in "Adnotationibus ad §§ 6 & 7" (pag. 341) obiter monuimus. Nec latet, non modo quam in ea re exigue profecerint Geometræ, sed etiam — id quod jure vitio vertatur Analyseos cultoribus — parum abesse ut paucae, quae huic rei supersunt, veritates argutiis vanis falsisque ratiociniis obrutae fuerint: cujus in eo praesertim haerere videtur culpa, quod in his quoque Analyseos partibus doctrinae serierum infinitarum levior aliquanto quam decuit cura fuerit posita. Scilicet, ut constat, integrale $\Sigma f_x$ — ne dicam $\Sigma(e^{rx}f_x)$, cujus inveniendi valoris posterior necesse sit cura — quum non nisi perraro sub formâ finitâ exprimi licuerat, perfacilis sibi aditus ad infinitas series plerisque videbatur.

---

"et $h$ quibuscumque, imaginariis aeque ac realibus, salvâ dumtaxat conditione ut ne sit "$e^h - 1 = o$. Scilicet quoniam ista aequatio vera est $x$ et $h$ quibuscumque realibus, "salvâ conditione modo commemoratâ: at, differentiatâ (finite) functione quadam i-"psius $x$ rationali ac integrâ $y$ nec non functione $e^x$, eadem prorsus resultat formula, "sive realis sit sive imaginaria variabilis illa $x$ nec non differentia $\Delta x$, — quippe quae "differentiatio in eo solo consistit, ut posito $x + \Delta x$ loco $x$ sumatur differentia, cujus "reducendae leges eaedem prorsus sint functioni formae $e^x y$, sive realis sit $x$ sive "imaginaria —; ne gutta quidem superest dubii, quin legitima sit aequ. (39) $x$ et $h$ "quibuscumque, salvâ dumtaxat conditione supra commemoratâ, denotante $y^{(n)}$formam "derivatae functionis illius $y$, datisque functionibus $\varphi(h)$ et $\varphi^{(n)}(h)$ ut supra". —

Tum infra "positâque $\Delta x = h$ (haud $= o$)" mutetur in: "positâque $\Delta x = h$ "(tali ut ne sit $e^{rh} - 1 = o$)". —

In pag. 333 lineae 3:ae adponantur verba: "Certe nisi $h$ talis sit, ut $e^{hlN}$ seu $N^h = 1$". —

Quantas tamen habeat cautiones hujuscemodi transgressio*), adeo jam dudum neminem fugit, ut sperare nobis videamur fore ut consilium vel pauca, quae nobis hactenus re diligentius quodammodo examinatâ fuerint deprehensa, communicandi in meliorem vertat partem.

## §. 1.

1. Sit $x$ variabilis quaelibet, realis aut imaginaria, $f_x$ functio ejusdem. Quoties ipsi $x$ talis tribuatur valor, ut exsistant functiones quaedam $\sigma f'_x$, $\sigma f''_x$, $\sigma f'''_x$, &c. quarum differentiae sint Derivatae $f'_x$, $f''_x$, $f'''_x$, &c. dum ipsi $x$ tribuitur incrementum $\Delta x = h$; toties exsistat necesse est $\nabla(x)$ quaedam, cujus differentia $= o$ sit, talis quâ legitima reddatur aequatio

$$(1) \ldots\ldots f_x = \nabla(x) + \frac{h}{1}\sigma f'_x + \frac{h^2}{1.2}\sigma f''_x + \frac{h^3}{1.2.3}\sigma f'''_x + \text{&c.}$$

siquidem $f_{x+h}$ explicari liceat secundum Theor. Taylorianum et praeterea series illa membri posterioris convergens sit. — Nam ex aequatione illa

$$f_{x+h} = f_x + \frac{h}{1}f'_x + \frac{h^2}{1.2}f''_x + \frac{h^3}{1.2.3}f'''_x + \text{&c.}$$
$$= f_x + \frac{h}{1}\Delta\sigma f'_x + \frac{h^2}{1\cdot 2}\Delta\sigma f''_x + \frac{h^3}{1\cdot 2\cdot 3}\Delta\sigma f'''_x + \text{&c.}$$

tunc habetur, ut facile patet,

$$f_{x+h} = f_x + \Delta\left(\frac{h}{1}\sigma f'_x + \frac{h^2}{1\cdot 2}\sigma f''_x + \frac{h^3}{1\cdot 2\cdot 3}\sigma f'''_x + \text{&c.}\right)$$

---

*) Conf. ea, quae jam in P. Ima et quidem in "Adnotationibus ad §§. 6 & 7" (pag. 542 et 543) allata sunt. Ad quae licet nonnulla nec ea quidem minimi momenti adjici possent commentaria, nobis tamen in praesenti, ne tempus teratur, allata sufficiant.

seu

$$\Delta\left(f_x - \frac{h}{1}\sigma f'_x - \frac{h^2}{1\cdot 2}\sigma f''_x - \frac{h^3}{1\cdot 2\cdot 3}\sigma f'''_x - \text{&c.}\right) = 0:$$

quam ipsam sub formâ (1) licet describi. —

2. Æquatio (1) dat, salvis supra expositis conditionibus,

$$h\sigma f'_x = \varpi(x) + f_x - \frac{h^2}{2!}\sigma f''_x - \frac{h^3}{3!}\sigma f'''_x - \text{&c.}$$

cujus membro posteriori aliam certis in casibus reddi licet formam, promotis nempe signis illis $\sigma$: id quod jam est explicandum.

Scilicet ex art. praecedenti patet, quoties exsistant functiones quaedam ${}^{\sigma}f'_x$, ${}^{\sigma}f'''_x$, ${}^{\sigma}f'''''_x$, &c. quarum Differentiae, dum ipsi $x$ tribuitur incrementum $h$, sint $f'_x$, $f''_x$, $f'''_x$, &c. atque insuper ($m$ denotante editum quemdam numerum integrum) series

(2) . . . . . $\frac{h}{1}\sigma f^{(m+1)}_x, \frac{h^2}{2!}\sigma f^{(m+2)}_x, \frac{h^3}{3!}\sigma f^{(m+3)}_x$, &c.

convergens sit, ideoque etiam unaquaeque harum

$$\frac{h}{1}\sigma f^{(m)}_x, \frac{h^2}{2!}\sigma f^{(m+1)}_x, \frac{h^3}{3!}\sigma f^{(m+2)}_x, \frac{h^4}{4!}\sigma f^{(m+3)}_x, \text{&c.}$$

$$\frac{h}{1}\sigma f^{(m-1)}_x, \frac{h^2}{2!}\sigma f^{(m)}_x, \frac{h^3}{3!}\sigma f^{(m+1)}_x, \frac{h^4}{4!}\sigma f^{(m+2)}_x, \frac{h^5}{5!}\sigma f^{(m+3)}_x, \text{&c.}$$

. . . . . .

$$\frac{h}{1}\sigma f'_x, \frac{h^2}{2!}\sigma f''_x, \ldots\ldots \frac{h^m}{m!}\sigma f^{(m)}_x, \frac{h^{m+1}}{(m+1)!}\sigma f^{(m+1)}_x, \frac{h^{m+2}}{(m+2)!}\sigma f^{(m+2)}_x, \frac{h^{m+3}}{(m+3)!}\sigma f^{(m+3)}_x, \text{&c.}$$

toties exsistere $\varpi_1(x)$, $\varpi_2(x)$, &c. quarum Differentiae $= o$ sint

et quibus legitimae reddantur aequationes sequentes:

$$(3)\ldots\begin{cases} h\sigma f'_x = \upsilon_1(x) + f_x - \frac{h^2}{2!}\sigma f''_x - \frac{h^3}{3!}\sigma f'''_x - \text{&c.}, \text{ siquidem } f_{x+h} \text{ explicari liceat sec. Th. Tayl.,} \\ h\sigma f''_x = \upsilon_2(x) + f'_x - \frac{h^2}{2!}\sigma f'''_x - \frac{h^3}{3!}\sigma f^{\text{IV}}_x - \text{&c.}, \text{ siquidem } f'_{x+h} \text{ - - - - - - - - - - - - - - -,} \\ h\sigma f'''_x = \upsilon_3(x) + f''_x - \frac{h^2}{2!}\sigma f^{\text{IV}}_x - \frac{h^3}{3!}\sigma f^{\text{V}}_x - \text{&c.}, \text{ siquidem } f''_{x+h} \text{ - - - - - - - - - - - - - - -,} \\ \text{- - - - - - - -} \\ h\sigma f^{(m+1)}_x = \upsilon_{m+1}(x) + f^{(m)}_x - \frac{h^2}{2!}\sigma f^{(m+2)}_x - \frac{h^3}{3!}\sigma f^{(m+3)}_x - \text{&c.}, \text{ siquidem } f^{(m)}_{x+h} \text{ expl. liceat sec. Theor. Taylor.;} \end{cases}$$

ideoque (sec. 1:am et 2:am), siquidem et $f_{x+h}$ et $f'_{x+h}$ explicari liceat,

$$h\sigma f'_x = \upsilon_1(x) + f_x - \frac{h}{2!}\left(\upsilon_2(x) + f'_x - \frac{h^2}{2!}\sigma f'''_x - \frac{h^3}{3!}\sigma f^{\text{IV}}_x - \text{&c.}\right)$$
$$- \frac{h^3}{3!}\sigma f'''_x - \frac{h^4}{4!}\sigma f^{\text{IV}}_x - \text{&c.}$$

breviter

$$= \upsilon_1(x) + f_x + E_1 h f'_x + \overset{1}{G}_1 h^3 \sigma f''''_x + \overset{1}{G}_2 h^4 \sigma f^{\text{IV}}_x + \overset{1}{G}_3 h^5 \sigma f^{\text{V}}_x + \text{&c.},$$

$\upsilon_1(x)$ denotante functionem ejusdem definitionis ac $\upsilon(x)$ atque $E_1$, $\overset{1}{G}_1$, $\overset{1}{G}_2$, $\overset{1}{G}_3$, &c. coëfficientes ab $x$ et $h$ minime pendentes;

tum ex hac [ope 3:æ aequationum (3)], siquidem insuper $f'''_{x+h}$ explicari liceat,

$$h\sigma f'_x = \upsilon_1(x) + f_x + E_1 h f'_x + \overset{1}{G}_1 h^2 \cdot \left(\upsilon_3(x) + f''_x - \frac{h^2}{2!}\sigma f^{\text{IV}}_x - \frac{h^3}{3!}\sigma f^{\text{V}}_x - \text{&c.}\right)$$
$$+ \overset{1}{G}_2 h^4 \sigma f^{\text{IV}}_x + \overset{1}{G}_3 h^5 \sigma f^{\text{V}}_x + \text{&c.}$$

breviter

$$= \upsilon_2(x) + f_x + E_1 h f'_x + E_2 h^2 f''_x + \overset{2}{G}_1 h^4 \sigma f^{\text{IV}}_x + \overset{2}{G}_2 h^5 \sigma f^{\text{V}}_x + \text{&c.};$$

et sic porro, donec ultimae aequationum (3) ratio fuerit habita: adeo ut successive habeantur

$h\sigma f'_x = \varpi_1(x) + f_x + E_1 h f'_x + \overset{1}{G}_1 h^3 \sigma f'''_x + \overset{4}{G}_2 h^4 \sigma f^{IV}_x + \overset{1}{G}_3 h^5 \sigma f^{V}_x + \&c.$ siquidem et $f_{x+h}$ et $f'_{x+h}$ explicari licet sec. Theor. Taylor.

$= \varpi_2(x) + f_x + E_1 h f'_x + E_2 h^2 f''_x + \overset{2}{G}_1 h^4 \sigma f^{IV}_x + \overset{2}{G}_2 h^5 \sigma f^{V}_x + \&c.$ siquidem insuper $f''_{x+h}$ explicari licet,

$= \varpi_3(x) + f_x + E_1 h f'_x + E_2 h^2 f''_x + E_3 h^3 f'''_x + \overset{3}{G}_1 h^5 \sigma f^{V}_x + \&c.$ siquidem insuper $f'''_{x+h}$ explicari licet,

&c. in genere, $m$ denot. numerum integrum quemlibet editum,

(4) . . . $h\sigma' f'_x = \upsilon(x) + f_x + E_1 h f'_x + E_2 h^2 f'''_x + \ldots + E_m h^m f^{(m)}_x + \overset{m}{G}_1 h^{m+2} \sigma f^{(m+2)}_x + \overset{m}{G}_2 h^{m+3} \sigma f^{(m+3)}_x + \&c.$

siquidem $f_{x+h}, f'_{x+h}, f''_{x+h}, \ldots\ldots f^{(m)}_{x+h}$ expl. licet sec. Th. Taylor.

3. Quo jam primo determinentur coëfficientes illae $E_1$, $E_2, \ldots\ldots E_m$, quae quidem a forma functionis $f_x$ minime pendeant ideoque eaedem sint omni functioni $f_x$, quâ satisfactum fuerit diversis, quae supra editae sunt, conditionibus; particularem illam functionem $m$i gradûs rationalem ac integram $y_x$ considerari sufficiet. Scilicet istâ satisfactum esse diversis his conditionibus, et quidem $x$ et $h$ quibuscumque, satis constat. De cætero, quoniam $y^{(m+1)}_x = o = y^{(m+2)}_x$, &c., ex (4) patet esse (positâ $f'_x = y_x$):

(5) . . . . . $h\sigma y_x = \upsilon(x) + \int_0^x y_x\, dx + \sum_{i=1}^{i=m} E_i h^i y^{(i-1)}_x$;

ideoque si fuerit $y_x = x^m$, quoniam tunc

$$y^{(i)}_x = m(m-1)\ldots(m-i+1)x^{m-i},$$

habetur ex (5)

$$(5')\ldots. h\sigma x^m = \varpi(x) + \frac{x^{m+1}}{m+1} + E_1 h x^m + \overset{i=m-1}{\underset{i=1}{S}} m(m-1)\ldots.(m-i+1) E_{i+1} h^{i+1} x^{m-i} \ldots -$$

Et quoniam, ut constat, loco ipsius $h\sigma x^m$ substitui licet

$$\frac{x^{m+1}}{m+1} - \frac{h}{2} x^m + m_1 \frac{h^2}{2} \mathfrak{B}_1 x^{m-1} - m_3 \frac{h^4}{4} \mathfrak{B}_3 x^{m-3} + m_5 \frac{h^6}{6} \mathfrak{B}_5 x^{m-5} - \text{&c.}$$ usque ad terminum ipsius $x$ aut $x^\circ$;

patet haberi, pro omnibus $x$ et $h$, identice

$$E_1 h x^m + \overset{i=m-1}{\underset{i=1}{S}} m(m-1)\ldots.(m-i+1) E_{i+1} h^{i+1} x^{m-i} =$$

$$= \varpi(x) - \frac{h}{2} x^m + m_1 \frac{h^2}{2} \mathfrak{B}_1 x^{m-1} - m_3 \frac{h^4}{4} \mathfrak{B}_3 x^{m-3} + m_5 \frac{h^6}{6} \mathfrak{B}_5 x^{m-5} - \text{&c.}$$

ex qua identitate — [quoniam heic $\varpi(x)$ immutata manebit variatis quomodocumque $x$ et $h$, ideoque $= o$] — consequitur esse ($p$ denot. num. integrum quemlibet editum)

$$(6)\ldots\ldots\ldots E_1 = -\tfrac{1}{2},\ E_{2p+1} = o,\ E_{2p} = (-1)^{p-1} \frac{\mathfrak{B}_{2p-1}}{(2p)!}\ ^*) \ldots -$$

Quae cum ita sint, debitâque ratione habitâ propositionis cognitae

$$(7)\ldots\ldots\ldots\ldots h \sum f_x = h\sigma f_x + \varpi(x),$$

$\sigma f_x$ denotante (uti hactenus) particularem quamdam functionem, cujus Differentia sit $f_x$,

$\sum f_x$ expressionem universalem, quae in se omnes has continet functiones,

$\varpi(x)$ functionem arbitrariam cujus Differentia sit $= o$,

---

*) Scilicet

$$m(m-1)\ldots\ldots(m-2p+2) E_{2p} = (-1)^{p-1} [m]_{2p-1} \frac{\mathfrak{B}_{2p-1}}{2p} \ldots -$$

ex allatis hoc colligitur

### Theorema I

Sit $x$ variabilis realis aut imaginaria, $f_x$ functio illius. Quoties ipsi $x$ talis tribuatur valor, ut exsistant functiones quaedam $\sigma f'_x$, $\sigma f''_x$, $\sigma f'''_x$, &c. quarum Differentiae, dum ipsi $x$ contingat incrementum $\Delta x = h$, sint Derivatae illae $f'_x$, $f''_x$, $f'''_x$, &c.; toties legitima erit — $m$ denot. numerum integrum quemlibet editum — aequatio

$$(\mathrm{I}) \quad \ldots \quad h\sum f'_x = \varpi(x) + f_x - \tfrac{1}{2}hf'_x + \sum_{p=1}^{p=m} (-1)^{p-1} \frac{\mathfrak{B}_{2p-1}}{(2p)!} h^{2p} f_x^{(2p)} +$$

$$+ {}^{2m}G_1 h^{2m+2} . \sigma f_x^{(2m+2)} + {}^{2m}G_2 h^{2m+3} . \sigma f_x^{(2m+3)} + {}^{2m}G_3 h^{2m+4} . \sigma f_x^{(2m+4)} + \&c.$$

[${}^{2m}G$ diversis denotantibus functiones quasdam ipsius $m$, ab $x$ et $h$ formàque functionis $f_x$ haud pendentes], siquidem non modo $f_{x+h}$ ipsam sed etiam $f'_{x+h}$, $f''_{x+h}$, $\ldots\ldots f^{(m)}_{x+h}$ secundum Theor. Taylor. explicari liceat atque insuper series illa

$$(8) \quad \ldots \ldots \ldots \quad \frac{h}{1}\sigma f_x^{(2m+1)}, \frac{h^2}{2!}\sigma f_x^{(2m+2)}, \frac{h^3}{3!}\sigma f_x^{(m+3)}, \&c.$$

convergens sit. —

Coroll. Eodemque tempore exsistet functio quædam $\varpi(x)$, cujus differentia (dum $\Delta x = h$) sit $= o$, talis qua legitima

reddatur æquatio

(II) . . . . . $h\sigma f'_x = \nabla(x) + f_x - \frac{1}{2}hf'_x + \&c.$ [sicut in (I)]. —

## §. 2.

Priusquam in re generali ulterius et quidem ad coëfficientes illas $G$ determinandas progredimur, non possumus quin hoc loco moneamus licere vi Theorematis præcedentis non solum inveniri relationem numerorum Bernoullii quantitatumque illarum $C$ in Parte I:a commemoratarum (quo facto formula comparatur, ex qua directe computari liceat hos numeros) sed etiam formulam nancisci, quâ — ut jam in P. I:a pag. 337 monuimus — inter se comparari liceat integralia illa $\Sigma y_x$ et $\Sigma\left((-1)^{\frac{x}{h}} y_x\right)$. —

1:o) Functionem illam $e^x$ ($x$ reali) Theoremati nostro subjicere sufficiet. Hac satisfactum esse diversis quæ in Theoremate expositæ sunt conditionibus, et quidem $x$ et $h$ quibuscumque realibus, satis constat. Et quoniam, $x$ et $h$ talibus, semper loco ipsarum $h\sigma f'_x$, $h\sigma f_x^{(2m+2)}$, $h\sigma f_x^{(2m+3)}$, &c. substitui licet $\frac{h}{e^h-1}e^x$; erit sec. (II), $m$ numero integro quolibet edito, semper

$$\frac{h}{e^h-1}e^x = \nabla(x) + e^x\left\{1 - \frac{h}{2} + \sum_{p=1}^{p=m}(-1)^{p-1}\frac{\mathfrak{B}_{2p-1}}{(2p)!}h^{2p} + \frac{h}{e^h-1}\left(G_1^{2m}h^{2m+1} + G_2^{2m}h^{2m+2} + \&c.\right)\right\},$$

ideoque, differentiando (finite),

$$(9)\ldots\frac{h}{e^h-1} = 1 - \frac{h}{2} + \sum_{p=1}^{p=m}(-1)^{p-1}\frac{\mathfrak{B}_{2p-1}}{(2p)!}h^{2p} + \frac{h}{e^h-1}\cdot\left(G_1^{2m}h^{2m+1} + G_2^{2m}h^{2m+2} + \&c.\right) -$$

At quoniam functionem $\frac{h}{e^h-1}$, brev. $F(h$, pro omni $h$ valore numerico infra limitem quemdam explicari licet secundum Theorema Maclaurinum *); patet haberi (tali $h$ quolibet)

$$1-\frac{h}{2}+\sum_{p=1}^{p=m}(-1)^{p-1}\frac{\mathfrak{B}_{2p-1}}{(2p)!}h^{2p}+\frac{h}{e^h-1}\left(\overset{2m}{G}_1 h^{2m+1}+\overset{2m}{G}_2 h^{2m+2}+\&c.\right)=$$

$$=1+\frac{F'(o)}{1}h+\frac{F''(o)}{2!}h^2+\ldots\ldots+\frac{F^{(2m)}(o)}{(2m)!}h^{2m}+\frac{F^{(2m+1}(o)}{(2m+1)!}h^{2m+1}+\&c.$$

seu $\left[\text{quoniam ex Part. I:a p. 322 habentur } F'(o)=-\frac{1}{2},\ F^{(2p+1)}(o)=o\right]$

$$=1-\frac{h}{2}+\frac{F''(o)}{2!}h^2+\ldots\ldots+\frac{F^{(2m)}(o)}{(2m)!}h^{2m}+\frac{F^{(2m+1)}(o)}{(2m+1)!}h^{2m+1}+\&c.$$

ideoque comparatis coëfficientibus

(10) . . . $\mathfrak{B}_{2p-1}=(-1)^{p-1}F^{(2p)}(o)$ **), i. e. secund. Part. I:am

10′) . . . . . $=(-1)^p\cdot\frac{2p}{2^{2p}(2^{2p}-1)}\sum_{i=1}^{i=2p-1}\overset{2p-1}{C}_i=(-1)^p\cdot\frac{2p}{2^{2p}(2^{2p}-1)}\left[\sum_{i=1}^{i=p-1}\overset{2p-1}{C}_i+\tfrac{1}{2}\overset{2p-1}{C}_p\right]$,

scilicet

(11) . . . . . $\overset{2p-1}{C}_i=\sum_{k=1}^{k=i}(-1)^k(2p)_{i-k}k^{2p-1}$. —

---

*) Vid. "Notam" sub finem hujus Part. II:æ æqu. (10).

**) Eandem hanc esse formulam ac eam, quam aliâ viâ deductam Lacroix in T:o III:o pag. 115 exposuit, plane apparet. Legitimam eam esse nos heic, ut videmur, perfecte probavimus. — De cætero per se patet, relationes has (10) et (10′) directe et quidem omni Theorematis præcedentis ratione posthabitâ ex æqu. illâ (10) "Notæ" nuper citatæ concludi licere.

2:o) Quoniam secundum æqu. (I), posità $f'_x = y_x$ rationali ac integræ *m*:i gradûs, habetur ($x$ et $h$ quibuscumque)

$$h\Sigma y_x = \varpi(x) + \int_0^x y_x dx - \tfrac{1}{2}hy_x + \sum_{i=1}^{i=\frac{m}{2}} (-1)^{i-1} \frac{\mathfrak{B}_{2i-1}}{(2i)!} h^{2i} y_x^{(2i-1)}, \text{ dum } m \text{ par est,}$$

$$\text{et } = \varpi(x) + \int_0^x y_x dx - \tfrac{1}{2}hy_x + \sum_{i=1}^{i=\frac{m+1}{2}} (-1)^{i-1} \frac{\mathfrak{B}_{2i-1}}{(2i)!} h^{2i} y_x^{(2i-1)}, \text{ dum } m \text{ impar;}$$

patet, sive $m$ par $= 2p$ sive impar $= 2p-1$, haberi

$$(12) \ldots\ldots h\Sigma y_x = \varpi(x) + \int_0^x y_x dx - \tfrac{1}{2}hy_x + \sum_{i=1}^{i=p} (-1)^{i-1} \frac{\mathfrak{B}_{2i-1}}{(2i)!} h^{2i} y_x^{(2i-1)}. \quad -$$

Præterea secundum æquat. (32) et (33) Part. I:æ habetur, vi relationis (10′),

$$(13) \ldots\ldots h\Sigma\left(e^{-\pi\frac{x}{h}\sqrt{-1}} y_x\right) = \varpi_1(x) - e^{-\pi\frac{x}{h}\sqrt{-1}} \cdot \left\{ \tfrac{1}{2}hy_x - \sum_{i=1}^{i=p} (-1)^{i-1} \frac{(2^{2i}-1)\mathfrak{B}_{2i-1}}{(2i)!} h^{2i} y_x^{(2i-1)} \right\},$$

atque in specie, dum $x$ multiplex est ipsius $h$,

$$(13') \ldots\ldots h\Sigma\left((-1)^{\frac{x}{h}} y_x\right) = \varpi_1(x) + (-1)^{\frac{x}{h}+1} \cdot \left\{ \tfrac{1}{2}hy_x - \sum_{i=1}^{i=p} (-1)^{i-1} \frac{(2^{2i}-1)\mathfrak{B}_{2i-1}}{(2i)!} h^{2i} y_x^{(2i-1)} \right\}. \quad -$$

Collatis jam æquationibus (12) et (13) habetur notatu vere digna relatio: $x$ et $h$ quibuscumque erit

$$h\sum\left(e^{-\pi\frac{x}{h}\sqrt{-1}}y_x\right)+\varpi(x)=-e^{-\pi\frac{x}{h}\sqrt{-1}}.\left[h\Sigma y_x+\varpi_1(x)\right]+$$

$$+e^{-\pi\frac{x}{h}\sqrt{-1}}.\left\{\int_0^x y_x dx-hy_x+\overset{i=p}{\underset{i=1}{S}}(-1)^{i-1}\frac{\mathfrak{B}_{2i-1}}{(2i)!}(2h)^{2i}.y_x^{(2i-1)}\right\},$$

seu potius, inclusis functionibus arbitrariis in signis integralium indefinitorum,

$$(14)....h\left\{\Sigma y_x+e^{-\pi\frac{x}{h}\sqrt{-1}}\sum\left(e^{-\pi\frac{x}{h}\sqrt{-1}}y_x\right)\right\}=\int_0^x y_x dx-hy_x+\overset{i=p}{\underset{i=1}{S}}(-1)^{i-1}\frac{\mathfrak{B}_{2i-1}}{(2i)!}(2h)^{2i}.y_x^{(2i-1)},$$

atque in specie, dum $x$ multiplex est ipsius $h$,

$$(14')...h\left\{\Sigma y_x+(-1)^{\frac{x}{h}}\sum\left((-1)^{\frac{x}{h}}y_x\right)\right\}=\int_0^x y_x dx-hy_x+\overset{i=p}{\underset{i=1}{S}}(-1)^{i-1}\frac{\mathfrak{B}_{2i-1}}{(2i)!}(2h)^{2i}.y_x^{(2i-1)}.\ —$$

Cuinam in doctrina sericrum commodo sit ista formula, facile patet. Sic ex. gr. dum valores positivos integros ab 1 inde assumere ponitur $n$, ex hac formula elici licet relationem summarum

$$\overset{n}{\underset{n=1}{S}}y_n \quad \text{et} \quad \overset{n}{\underset{n=1}{S}}(-1)^n y_n.\ —$$

## §. 3.

1. Jam quo determinentur coëfficientes illæ $\overset{2m}{G}$ æquationis (I), quoniam functionem $\frac{h}{e^h-1}$ (dum $2\pi>h>-2\pi$) explicari licet secundum dignitates ipsius $h$, et quidem

$$(15)\ldots\ldots\ \frac{h}{e^h-1}=1-\frac{h}{2}+\frac{\mathfrak{B}_1}{2!}h^2-\frac{\mathfrak{B}_3}{4!}h^4+\frac{\mathfrak{B}_5}{6!}h^6-\text{&c.}\ (2\pi>h>-2\pi),$$

patet collatâ hac æqu. cum æqu. illa (9) haberi, $h$ quolibet cujus valor num. $<2\pi$ sit atque $m$ numero quolibet integro edito,

$$\frac{h}{e^h-1}\left(\overset{2m}{G}_1 h^{2m+1}+\overset{2m}{G}_2 h^{2m+2}+\text{&c.}\right)=\sum_{p=m+1}^{p=\infty}(-1)^{p-1}\frac{\mathfrak{B}_{2p-1}}{(2p)!}h^{2p},$$

seu

$$(16)\ldots\ (-1)^m\left(\overset{2m}{G}_1+\overset{2m}{G}_2 h+\overset{2m}{G}_3 h^2+\text{&c.}\right)=\frac{e^h-1}{h}\sum_{p=1}^{p=\infty}(-1)^{p-1}\frac{\mathfrak{B}_{2m+2p-1}}{(2m+2p)!}h^{2p-1},$$

$$=\left(\frac{h}{1!}+\frac{h^2}{2!}+\frac{h^3}{3!}+\text{&c.}\right)\left(\frac{\mathfrak{B}_{2m+1}}{(2m+2)!}-\frac{\mathfrak{B}_{2m+3}}{(2m+4)!}h^2+\frac{\mathfrak{B}_{2m+5}}{(2m+6)!}h^4-\text{&c.}\right),$$

$$\overset{*)}{=}\frac{1}{1!}\frac{\mathfrak{B}_{2m+1}}{(2m+2)!}h+\frac{1}{2!}\frac{\mathfrak{B}_{2m+1}}{(2m+2)!}h^2+\left(\frac{1}{3!}\frac{\mathfrak{B}_{2m+1}}{(2m+2)!}-\frac{1}{1!}\frac{\mathfrak{B}_{2m+3}}{(2m+4)!}\right)h^3+$$

$$+\left(\frac{1}{4!}\frac{\mathfrak{B}_{2m+1}}{(2m+2)!}-\frac{1}{2!}\frac{\mathfrak{B}_{2m+3}}{(2m+4)!}\right)h^4+$$

$$+\left(\frac{1}{5!}\frac{\mathfrak{B}_{2m+1}}{(2m+2)!}-\frac{1}{3!}\frac{\mathfrak{B}_{2m+3}}{(2m+4)!}+\frac{1}{1!}\frac{\mathfrak{B}_{2m+5}}{(2m+6)!}\right)h^5+$$

&c.

Itaque comparatis coëfficientibus et, quoniam $\overset{2m}{G}_1=o$ est, mutatis (simplicitatis ergo)

---

*) Scil. facile patet, series ambas membri posterioris novissimi convergentes manere, etiamsi terminorum loco substituantur valores eorum numerici.

$$(-1)^m \overset{2m}{G}_2 , \ (-1)^m \overset{2m}{G}_3 , \ (-1)^m \overset{2m}{G}_4 , \ \&c.$$

in

$$\overset{m}{H}_1 , \ \overset{m}{H}_2 , \ \overset{m}{H}_3 , \ \&c.$$

habentur relationes sequentes:

$$\begin{cases} \overset{m}{H}_1 = \dfrac{1}{1!}\dfrac{\mathfrak{B}_{2m+1}}{(2m+2)!}, \\ \overset{m}{H}_3 = \dfrac{1}{3!}\dfrac{\mathfrak{B}_{2m+1}}{(2m+2)!} - \dfrac{1}{1!}\dfrac{\mathfrak{B}_{2m+3}}{(2m+4)!}, \\ \overset{m}{H}_5 = \dfrac{1}{5!}\cdot\dfrac{\mathfrak{B}_{2m+1}}{(2m+2)!} - \dfrac{1}{3!}\dfrac{\mathfrak{B}_{2m+3}}{(2m+4)!} + \dfrac{1}{1!}\dfrac{\mathfrak{B}_{2m+5}}{(2m+6)!}, \\ \&c. \end{cases}$$

atque

$$\begin{cases} \overset{m}{H}_2 = \dfrac{1}{2!}\cdot\dfrac{\mathfrak{B}_{2m+1}}{(2m+2)!}, \\ \overset{m}{H}_4 = \dfrac{1}{4!}\cdot\dfrac{\mathfrak{B}_{2m+1}}{(2m+2)!} - \dfrac{1}{2!}\dfrac{\mathfrak{B}_{2m+3}}{(2m+4)!}, \\ \overset{m}{H}_6 = \dfrac{1}{6!}\cdot\dfrac{\mathfrak{B}_{2m+1}}{(2m+2)!} - \dfrac{1}{4!}\dfrac{\mathfrak{B}_{2m+3}}{(2m+4)!} + \dfrac{1}{2!}\dfrac{\mathfrak{B}_{2m+5}}{(2m+6)!}, \\ \&c. \end{cases}$$

verbo:

$$(17)... \begin{cases} \overset{m}{H}_{2p-1} = \dfrac{1}{(2p-1)!}\cdot\dfrac{\mathfrak{B}_{2m+1}}{(2m+2)!} - \dfrac{1}{(2p-3)!}\cdot\dfrac{\mathfrak{B}_{2m+3}}{(2m+4)!} + \ldots + (-1)^{p-1}\cdot\dfrac{1}{1!}\cdot\dfrac{\mathfrak{B}_{2m+2p-1}}{(2m+2p)!}, \\ \overset{m}{H}_{2p} = \dfrac{1}{(2p)!}\cdot\dfrac{\mathfrak{B}_{2m+1}}{(2m+2)!} - \dfrac{1}{(2p-2)!}\dfrac{\mathfrak{B}_{2m+3}}{(2m+4)!} + \ldots + (-1)^{p-1}\cdot\dfrac{1}{1!}\dfrac{\mathfrak{B}_{2m+2p-1}}{(2m+2p)!}\cdot \end{cases}$$

Itaque loco Theorematis I jam hoc substitui licet

## Theorema II.

Sit $x$ variabilis realis aut imaginaria, $f_x$ functio illius. Quoties ipsi $x$ talis tribuatur valor ------- (sicut in Theor. I) ------- æquatio

$$\text{(III)} \quad \ldots\ldots h\sum f'_x = \varpi(x) + f_x - \tfrac{1}{2}hf'_x + \sum_{p=1}^{p=m} (-1)^{p-1} \frac{\mathfrak{B}_{2p-1}}{(2p)!} h^{2p} f_x^{(2p)} +$$

$$+ (-1)^m \cdot \left\{ \overset{m}{H}_1 h^{2m+3} \cdot \sigma f_x^{(2m+3)} + \overset{m}{H}_2 h^{2m+4} \cdot \sigma f_x^{(2m+4)} + \&c. \right\},$$

[$\overset{m}{H}$ diversis ab æquat. (17) datis], siquidem non modo $f_{x+h}$ ipsam sed etiam $f'_{x+h}$, $f''_{x+h}$, $\ldots\ldots f^{(2m)}_{x+h}$ secundum Theor. Taylorianum explicari liceat, — atque insuper series illa (8) convergens sit. —

Coroll. Eodemque tempore exsistet functio quædam $\upsilon(x)$, cujus Differentia (dum $\Delta x = h$) sit $= o$, talis quâ legitima reddatur æquatio

$$\text{(IV)} \quad \ldots\ldots h\sigma f'_x = \upsilon(x) + f_x - \tfrac{1}{2}hf'_x + \&c. \text{ [sicut in (III)]}. —$$

2. Hæc fere sunt, quæ in præsenti de Integrali $h\sum f_x$ secundum dignitates ipsius $h$ explicando probata sistere voluimus. Quænam Analysi olim ex eo fonte defluant emolumenta, id in præsenti silentio prætereuntes solummodo

hoc monitum voluimus vel maximi fuisse momenti ut ea, quæ ex commentationibus veterum de hac re exstant, accuratiori tandem subjecta examini defæcata quodammodo sisti potuerint. — Verumtamen quum in eo maxima posita est utilitas diversarum, quas alias aliis temporibus excogitaverunt, formularum exprimendi Integrale illud $\Sigma f_x$, quod exinde deduci liceat summas illas $Sf_x$; non possumus quin heic obiter saltem indicemus, quonam modo ex Theoremate nostro deduci liceat formulam illam Maclaurini summatoriam cum debito suo termino complementario. Etenim si ponatur (uti assolet) signum $h\sum_{x_0}^{x}\varphi_x$ denotare functionem, cujus Differentia (dum $\Delta x = h$) sit $h\varphi_x$, deminutam valore suo pro $x=x_0$; patet, quoniam $\mathop{S}_{x_0}^{x}\varphi_x = \sum_{x_0}^{x}\varphi_x + \varphi_x$, ex æquatione (III) — mutatâ in ea $f'_x$ in $\varphi_x$ ideoque $f_x^{(n)}$ in $\varphi_x^{(n-1)}$ — haberi certis saltem in casibus

$$(18)\ldots\ldots h\mathop{S}_{x_0}^{x}\varphi_x = h\varphi_x + \int_{x_0}^{x} dx\left(\varphi_x + \tfrac{1}{2}h\varphi'_x + \mathop{S}_{p=1}^{p=m}(-1)^{p-1}\frac{\mathfrak{B}_{2p-1}}{(2p)!}h^{2p}\varphi_x^{(2p)}\right) +$$

$$+(-1)^m.h\left\{\Pi_1 h^{2m+2}\sum_{x_0}^{x}\varphi_x^{(2m+2)} + \Pi_2 h^{2m+3}\sum_{x_0}^{x}\varphi_x^{(2m+3)} + \text{&c.}\right\}.$$

Linea superior, ut constat, formulam illam Maclaurini

summatoriam justâ indutam formâ conficit *). Quæ in linea inferiori occurrit forma termini complementarii, quamvis insolita primo conspectu videatur, justa tamen — ut ex antecedentibus patet — et accurata perfecte est atque, ut alio quodam tempore explicaturos nos fore speramus, haudquaquam spernenda.

## §. 4.

1. Unicum in præsenti idemque alius plane generis, doctrinæ quidem serierum infinitarum proprium, adferre juvat exemplum commodi Theorematis nostri II:di. Scilicet interlucet ex antecedentibus licere $h\Sigma c^x y$, dum $y$ rationalis est ac integra functio ipsius $x$, explicari secundum dignitates ipsius $h$ cujuslibet, cui modulus infra $2\pi$ sit (qua de re fusius infra). Quod equidem secutis vestigium hæc fere ultro sese obtulit positio. — Positâ $f'_x = e^x y$ seu potius

$$(19) \ldots\ldots f_x = e^x \cdot \left(y - y' + y'' - \ldots\ldots + (-1)^m y^{(m)}\right),$$

$y$ denot. rationalem ac integram $m$:i gradûs functionem, habetur (adhibitâ coëff. binom. denominatione solitâ) $r$ denotante

---

*) Conf. Lacroix, T. III. pag. 146 art. 1001. Quam in Diario Crelleano T. XII pag. 265 Cel. Jacobi illi tribuit formam aptiorem, ea verbo tenus nostrae congruit: scilicet illi quidem signum $\Sigma_a^x \varphi_x$ idem valet ac nobis signum $\overset{x}{\underset{x_0}{S}} \varphi_x - \varphi_{x_0}$.

numerum integrum

$$(20) \ldots\ldots f_x^{(r+1)} = e^x \cdot \left(y + r_1 y' + r_2 y'' + \ldots\ldots\ldots + r_r y^{(r)}\right),$$

scilicet, dum $r > m$, unus pluresve ultimorum desunt terminorum: ita ut, dum $r \leqq m$, habeatur

$$(20') \ldots\ldots f_x^{(r+1)} = e^x \cdot \left(y + r_1 y' + r_2 y'' + \ldots\ldots + r_m y^{(m)}\right). —$$

Per se patet isthac functione $f_x$ satisfactum esse diversis quæ in Theoremate exposita sunt reservatis [saltem si excipiatur ultimum illud de convergentia seriei (8)] et quidem $x$ et $h$ quibuscumque: heic tamen modulus ipsius $h$ infra $2\pi$ esse ponetur. De cætero sec. Part. I:am pag. 331 habetur

$$(21) \ldots h\sigma f'_x = h\sigma(e^x y) = \frac{h}{e^h - 1} e^x \cdot \left\{ y + \sum_{i=1}^{i=m} (-1)^i \frac{\overset{i}{A}_1 e^h + \overset{i}{A}_2 e^{2h} + \ldots + \overset{i}{A}_i e^{ih}}{i\,!} \left(\frac{h}{e^h - 1}\right)^i y^{(i)} \right\},$$

atque, dum $r \leqq m$,

$$(22) \ldots h\sigma f_x^{r+1} = h \cdot \left[\sigma(e^x y) + r_1 \cdot \sigma(e^x y') + r_2 \cdot \sigma(e^x y'') + \ldots + r_m \cdot \sigma(e^x y^{(m)})\right]. —$$

Itaque erit secundum æqu. (IV), $x$ quolibet atque $h$ tali, cujus mod. $< 2\pi$ sit, positoque $2n > m$:

$$(23) \ldots \therefore \frac{h}{e^h - 1} \left\{ y + \sum_{i=1}^{i=m} (-1)^i \frac{\overset{i}{A}_1 e^h + \overset{i}{A}_2 e^{2h} + \ldots\ldots + \overset{i}{A}_i e^{ih}}{i\,!} \left(\frac{h}{e^h - 1}\right)^i y^{(i)} \right\} =$$

$$= \upsilon(x).e^{-x} + \left(1-\frac{h}{2}\right)y - y' + y'' - \ldots\ldots + (-1)^m y^{(m)} +$$

$$+ \sum_{p=1}^{p=m} (-1)^{p-1} \frac{\mathfrak{B}_{2p-1}}{(2p)!} \left( y + [2p-1]_1 y' + [2p-1]_2 y'' + \ldots + [2p-1]_m y^{(m)} \right) +$$

$$+ (-1)^n e^{-x} \cdot \left\{ \overset{n}{H}_1 h^{2n+3} \cdot \sigma f_x^{(2n+3)} + \overset{n}{H}_2 h^{2n+4} \cdot \sigma f_x^{(2n+4)} + \text{&c.} \right\},$$

si modo series illa (8), i. e. heic

$$\frac{h}{1}\sigma f_x^{(2n+1)}, \frac{h^2}{2!}\sigma f_x^{(2n+2)}, \frac{h^3}{3!}\sigma f_x^{(2n+3)}, \text{ &c.}$$

seu secundum (22) ista

$$\begin{cases} \frac{h}{1}\left[\sigma(e^x y) + (2n+1)_1 \sigma(e^x y') + \ldots\ldots + (2n+1)_m \sigma(e^x y^{(m)})\right], \\ \frac{h^2}{2!}\left[\sigma(e^x y) + (2n+2)_1 \sigma(e^x y') + \ldots\ldots + (2n+2)_m \sigma(e^x y^{(m)})\right], \\ \frac{h^3}{3!}\left[\sigma(e^x y) + (2n+3)_1 \sigma(e^x y') + \ldots\ldots + (2n+3)_m \sigma(e^x y^{(m)})\right], \\ \text{&c.} \end{cases}$$

convergens sit: talem vero eam esse ex eo liquet, quod convergens est unaquæque (numero $m+1$ finito) serierum verticalium, ut per se patet. —

In æqu. (23) $\upsilon(x) = o$ erit. — Scilicet secundum definitionem $\upsilon(x)$ heic eadem manebit $x$ quolibet, quemcumque ipsi $h$ tribuis valorem, cujus modulus infra $2\pi$ sit. At pro

$h = o$ æquatio abit in

$$\sum_{i=1}^{i=m} (-1)^i \frac{\overset{i}{A}_1 + \overset{i}{A}_2 + \ldots\ldots + \overset{i}{A}_i}{i!} = \nabla(x) \cdot e^{-x} + \sum_{i=1}^{i=m} (-1)^i y^{(i)},$$

cujus membrum prius, secundum æqu. (12) Part. I:æ, in ipsam $\sum_{i=1}^{i=m} (-1)^i y^{(i)}$ redit. — Itaque $\nabla(x) = o$ est. —

At prius illud membrum (23) secundum dignitates ipsius $h$ explicari licet, $h$ quolibet cui modulus infra $2\pi$ sit*). Quod

---

*) Scilicet facili negotio perspicitur licere ($m$ et $n$ numeros integros denotantibus) functionem

$$e^{mh}\left(\frac{h}{e^h - 1}\right)^n$$

tali modo explicari, $h$ quolibet cui modulus infra $2\pi$ sit. Etenim ex æquat. (15), quæ reverà pro omni $h$ tali valet (vid. verba sub finem art. 2 "Notæ" huic Parti II:æ subjunctæ), hauritur $h$ cuilibet tali esse

$$\left(\frac{h}{e^h - 1}\right)^n = \left(1 - \frac{h}{2} + \frac{\mathfrak{B}_1}{2!} h^2 - \frac{\mathfrak{B}_3}{4!} h^4 + \text{ &c.}\right)^n \quad \text{explicatæ more solito}$$

serierum in formam $1 + \mathfrak{A}_1 h + \mathfrak{A}_2 h^2 + \mathfrak{A}_3 h^3 + $ &c.

quoniam ($\varrho$ denot. numerum $< 2\pi$) termini

$$\text{ipsius } \left(1 + \frac{\varrho}{2} + \frac{\mathfrak{B}_1}{2!} \varrho^2 + \frac{\mathfrak{B}_3}{4!} \varrho^4 + \text{ &c.}\right)^n \text{ explicatæ}$$

seriem conficiunt convergentem: id quod ex ipsa serie Cotangentis pro $x$ reali $< 2\pi$ absque negotio licet concludi. — Cætera patent. —

quoniam, ut facile constat, non nisi unico modo perfici potest; facili negotio patet loco æquationis (23) substitui licere istam, pro omni $h$ cujus modulus $< 2\pi$ sit,

$$(24)\quad \ldots \frac{h}{e^h-1}\left\{y+\sum_{i=1}^{i=m}(-1)^i\frac{\overset{i}{A}_1 e^h+\overset{i}{A}_2 e^{2h}+\ldots\ldots+\overset{i}{A}_i e^{ih}}{i!}\left(\frac{h}{e^h-1}\right)^i y^{(i)}\right\}=$$

$$=\left(1-\frac{h}{2}\right)y-y'+y''-\ldots\ldots+(-1)^m y^{(m)}+$$

$$+\sum_{p=1}^{p=\infty}(-1)^{p-1}\frac{\mathfrak{B}_{2p-1}}{(2p)!}h^{2p}\left(y+[2p-1]_1 y'+[2p-1]_2 y''+\ldots.+[2p-1]_m y^{(m)}\right).-$$

Quod si membrum posterius secundum $y$ et Derivatas $y'$, $y''$, $\ldots\ldots y^{(m)}$ ordinaretur, hæc ei contingeret forma

$$\left\{\begin{array}{l} y\left(1-\frac{h}{2}+\sum_{p=1}^{p=\infty}(-1)^{p-1}\frac{\mathfrak{B}_{2p-1}}{(2p)!}h^{2p}\right)- \\ -y'\left(1-\sum_{p=1}^{p=\infty}(-1)^{p-1}[2p-1]_1\frac{\mathfrak{B}_{2p-1}}{(2p)!}h^{2p}\right)+ \\ +y''\left(1+\sum_{p=1}^{p=\infty}(-1)^{p-1}[2p-1]_2\frac{\mathfrak{B}_{2p-1}}{(2p)!}h^{2p}\right)- \\ \text{\&c.} \\ \vdots \\ +(-1)^m y^{(m)}\left(1+(-1)^m\sum_{p=1}^{p=\infty}(-1)^{p-1}[2p-1]_m\frac{\mathfrak{B}_{2p-1}}{(2p)!}h^{2p}\right); \end{array}\right.$$

et quidem talem reverâ licitam esse ordinationem, ex eo patet quod termini summæ cujuslibet formæ ($i$ num. int. $\leqq m$)

$$(25) \quad \ldots\ldots \quad K_i = 1 + (-1)^i \sum_{p=1}^{p=\infty} (-1)^{p-1} [2p-1]_i \frac{\mathfrak{B}_{2p-1}}{(2p)!} h^{2p}$$

convergentem conficiunt seriem (id quod in art. insequenti erit explicatum). — Quæ cum ita sint et præterea sec. (15), quæ pro omni $h$ valet cujus modulus $< 2\pi$ sit *), habentur

$$\frac{h}{e^h - 1} = 1 - \frac{h}{2} + \sum_{p=1}^{p=\infty} (-1)^{p-1} \frac{\mathfrak{B}_{2p-1}}{(2p)!} h^{2p} ;$$

loco æquationis (24) substitui licebit

$$\sum_{i=1}^{i=m} (-1)^i \frac{\overset{i}{A}_1 e^h + \overset{i}{A}_2 e^{2h} + \ldots + \overset{i}{A}_i e^{ih}}{i!} \left(\frac{h}{e^h - 1}\right)^{i+1} y^{(i)} = \sum_{i=1}^{i=m} (-1)^i K_i y^{(i)} .$$

Quæ quoniam $m$ quovis dato valebit, habetur $h$ quolibet cujus modulus $< 2\pi$ sit ($i$ num. integro):

$$(26) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad K_i = \frac{\sum_{p=1}^{p=i} \overset{i}{A}_p e^{ph}}{i!} \left(\frac{h}{e^h - 1}\right)^{i+1} ,$$

ideoque secundum (25)

$$(27) \quad \ldots 1 + \sum_{p=1}^{p=\infty} (-1)^{p+i-1} [2p-1]_i \frac{\mathfrak{B}_{2p-1}}{(2p)!} h^{2p} = \frac{\sum_{p=1}^{p=i} \overset{i}{A}_p e^{ph}}{i!} \left(\frac{h}{e^h - 1}\right)^{i+1} ,$$

---

*) Vid. verba sub finem art. 2 "Notæ" huic Parti IIæ subjunctæ.

scilicet $A^{i}$ diversis formulâ (6) Part. I:æ datis. —

2. Terminos summæ (25) convergentem conficere seriem, facile patebit. Etenim posito successive $i = 2m$ et $= 2m-1$, summa illa

$$\sum_{p=1}^{p=\infty} (-1)^{p-1} [2p-1]_i \frac{\mathfrak{B}_{2p-1}}{(2p)!} h^{2p}$$

abit in

$$\sum_{p=m+1}^{p=\infty} (-1)^{p-1} [2p-1]_{2m} \frac{\mathfrak{B}_{2p-1}}{(2p)!} h^{2p} \quad \text{et} \quad \sum_{p=m}^{p=\infty} (-1)^{p-1} [2p-1]_{2m-1} \frac{\mathfrak{B}_{2p-1}}{(2p)!} h^{2p},$$

quoniam in $o$ redeunt

$$1_i, \quad 3_i, \quad 5_i, \ldots\ldots [i-1]_i .$$

Quarum loco substitui decet

$$\begin{cases} h^{2m} \sum_{p=1}^{p=\infty} (-1)^{m-1+p} [2m+2p-1]_{2m} \frac{\mathfrak{B}_{2m+2p-1}}{(2m+2p)!} h^{2p} \\ \text{et} \\ h^{2m} \sum_{p=0}^{p=\infty} (-1)^{m-1+p} [2m+2p-1]_{2m-1} \frac{\mathfrak{B}_{2m+2p-1}}{(2m+2p)!} h^{2p}, \end{cases}$$

seu *)

---

*) Scilicet

$$\frac{[2m+2p-1]_{2m}}{(2m+2p)!} = \frac{(2m+2p-1)(2m+2p-2)\ldots(2p)}{1. \quad 2. \ldots . (2m)} \cdot \frac{1}{1.2\ldots(2p-1)(2p)\ldots(2p+2m-1)(2p+2m)} =$$

$$= \frac{1}{(2m)!\,(2p-1)!\,(2m+2p)},$$

et

$$\frac{[2m+2p-1]_{2m-1}}{(2m+2p)!} = \frac{1}{(2m-1)!\,(2p)!\,(2m+2p)} . \quad —$$

$$(28)\ldots\ldots\begin{cases} (-1)^m \dfrac{h^{2m}}{(2m)!} \overset{p=\infty}{\underset{p=1}{S}} (-1)^{p-1} \dfrac{\mathfrak{B}_{2m+2p-1}}{2m+2p} \cdot \dfrac{h^{2p}}{(2p-1)!}, \\ \text{et} \\ (-1)^{m-1} \dfrac{h^{2m}}{(2m-1)!} \left[ \dfrac{\mathfrak{B}_{2m-1}}{2m} - \overset{p=\infty}{\underset{p=1}{S}} (-1)^{p-1} \dfrac{\mathfrak{B}_{2m+2p-1}}{2m+2p} \cdot \dfrac{h^{2p}}{(2p-1)!} \right]. \end{cases} —$$

Jamque adhibitâ relatione illâ

$$(29)\ldots\ldots\ldots lim. \frac{1}{(2r+1)(2r+2)} \cdot \frac{\mathfrak{B}_{2r+1}}{\mathfrak{B}_{2r-1}} = \frac{1}{(2\pi)^2},$$

res est in aprico. —

Quæ cum ita sint, ex (27) habentur

$$(30)\ldots\begin{cases} \left(\dfrac{h}{e^h-1}\right)^{2m+1} \cdot \overset{p=2m}{\underset{p=1}{S}} A_p e^{ph} - 1\,2.3\ldots..(2m) = (-1)^m h^{2m+1} \overset{p=\infty}{\underset{p=1}{S}} (-1)^{p-1} \dfrac{\mathfrak{B}_{2m+2p-1}}{2m+2p} \cdot \dfrac{h^{2p-1}}{(2p-1)!}, \\ \left(\dfrac{h}{e^h-1}\right)^{2m} \cdot \overset{p=2m-1}{\underset{p=1}{S}} A_p e^{ph} - 1.2.3\ldots(2m-1) = (-1)^m h^{2m} \cdot \left[ \dfrac{\mathfrak{B}_{2m-1}}{2m} - \overset{p=\infty}{\underset{p=1}{S}} (-1)^{p-1} \dfrac{\mathfrak{B}_{2m+2p-1}}{2m+2p} \cdot \dfrac{h^{2p}}{(2p)!} \right]; \end{cases}$$

quæ quidem ambæ pro $h=o$ in formulam (12) Part. I:æ abeunt atque præterea, $x$ quolibet cujus modulus $<2\pi$ sit, notandam hanc induunt formam ($m$ num. int.):

$$(31)\ldots\ldots\begin{cases} (-1)^m \cdot \left[ \dfrac{\overset{i=2m-1}{\underset{i=1}{S}} A_i e^{ix}}{(e^x-1)^{2m}} - \dfrac{\Gamma(2m)}{x^{2m}} \right] = \dfrac{\mathfrak{B}_{2m-1}}{2m} - \dfrac{\mathfrak{B}_{2m+1}}{2m+2} \cdot \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{\mathfrak{B}_{2m+3}}{2m+4} \cdot \dfrac{x^4}{4!} - \dfrac{\mathfrak{B}_{2m+5}}{2m+6} \cdot \dfrac{x^6}{6!} + \text{ &c.} \\ (-1)^m \cdot \left[ \dfrac{\overset{i=2m}{\underset{i=1}{S}} A_i e^{ix}}{(e^x-1)^{2m+1}} - \dfrac{\Gamma(2m+1)}{x^{2m+1}} \right] = \dfrac{\mathfrak{B}_{2m+1}}{2m+2} \cdot \dfrac{x}{1!} - \dfrac{\mathfrak{B}_{2m+3}}{2m+4} \cdot \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{\mathfrak{B}_{2m+5}}{2m+6} \cdot \dfrac{x^5}{5!} - \text{ &c.} \end{cases}$$

Permanere hasce legitimas, etiamsi $x$ indefinite in $o$ convergere ponatur, ex ipsis (30) perspicitur. —

Nota.

Ex æquatione (7) Part. I:æ patet, terminos illos

$$\frac{\overset{i=2m-1}{\underset{i=1}{S}} A_i^{2m-1} e^{ix}}{(e^x-1)^{2m}} \quad \text{et} \quad \frac{\overset{i=2m}{\underset{i=1}{S}} A_i^{2m} e^{ix}}{(e^x-1)^{2m+1}}$$

conficere ipsas

$$-\frac{d^{2m-1}\left(\frac{1}{e^x-1}\right)}{dx^{2m-1}} \quad \text{et} \quad \frac{d^{2m}\left(\frac{1}{e^x-1}\right)}{dx^{2m}} \; ;$$

et quidem non latet, potuisse nos omni absque negotio æquationes (31) ex æquatione (15), nempe

$$\frac{1}{e^x-1} = \frac{1}{x} - \frac{1}{2} + \overset{p=\infty}{\underset{p=1}{S}} (-1)^{p-1} \frac{\mathfrak{B}_{2p-1}}{2p} \cdot \frac{x^{2p-1}}{(2p\text{-}1)!} \; ,$$

deducere differentiando. Verumenimvero præterquam quod hujusce generis deductiones (ut constat) nondum gravioribus quibus laborant dubiis, etiamsi de realibus modo agatur quantitatibus, fuerint liberatæ *); nos, eam insuper ob caussam quod

---

*) Quod in Diario Crelleano T. XXV pag. 241 seqq. de hac re probasse videtur Clar. Grunert, si fuerit

$$f(x) = A + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \text{ &c. } (a \geqq x \leqq b) ,$$

oblatum foret exemplum Theorematis nostri II:i, satius putavimus eam, qua usi sumus, adhibere formularum deductionem.

3. Permagni fuit in Analysi momenti relatio illa (15). Quas jam invenimus formulas (31) generales haud minoris esse futuras, facile patet. Sufficiant hæc in præsenti:

---

esse etiam

$$\frac{df(x)}{dx} = A_1 + 2A_2x + 3A_3x^2 + \text{&c.} \quad (a \gtreqless x \lesseqgtr b),$$

ne id quidem perfecte sibi constare haud desunt exempla. —

Vera quidem est æquatio

$$l(1+x) = x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 - \text{&c.} \quad (\text{etiamsi } x=1 \text{ ponatur}),$$

at ista

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \text{&c.} \quad (\text{dum } x=1)\,?!$$

Vera quidem est æquatio (dum $o > \mu > -1$)

$$(1+x)^\mu = 1 + \mu_1 x + \mu_2 x^2 + \mu_3 x^3 + \text{&c.} \quad (\text{etiamsi } x=1 \text{ ponatur});$$

at ista

$$\mu(1+x)^{\mu-1} = \mu_1 + 2\mu_2 x + 3\mu_3 x^2 + \text{&c.}$$

seu

$$(1+x)^{\mu-1} = 1 + (\mu-1)_1 x + (\mu-1)_2 x^2 + \text{&c.}, \quad \text{dum } x=1,$$

prorsus est falsa, quoniam series illa membri posterioris (dum $x=1$) divergens est superante $-1$ exponentem $\mu-1$. —

Et sic plura.

Posito $x = v\sqrt{-1}$ ,

($v$ realis valore numer. $< 2\pi$) ,

formulæ (31) abeunt in

$$(32)\ldots\begin{cases} \left(\dfrac{\sqrt{-1}}{e^{v\sqrt{-1}}-1}\right)^{2m} \cdot \sum_{i=1}^{i=2m-1} A_i e^{iv\sqrt{-1}} - \dfrac{\Gamma(2m)}{v^{2m}} = \dfrac{\mathfrak{B}_{2m-1}}{2m} + \dfrac{\mathfrak{B}_{2m+1}}{2m+2}\cdot\dfrac{v^2}{2!} + \dfrac{\mathfrak{B}_{2m+3}}{2m+4}\cdot\dfrac{v^4}{4!} \\ -\left(\dfrac{\sqrt{-1}}{e^{v\sqrt{-1}}-1}\right)^{2m+1} \cdot \sum_{i=1}^{i=2m} A_i e^{iv\sqrt{-1}} + \dfrac{(\Gamma 2m+1)}{v^{2m+1}} = \dfrac{\mathfrak{B}_{2m+1}}{2m+2}\cdot\dfrac{v}{1!} + \dfrac{\mathfrak{B}_{2m+3}}{2m+4}\cdot\dfrac{v^3}{3!} + \text{ &c.} \end{cases}$$

In priori, quoniam

$$\left(\frac{\sqrt{-1}}{e^{v\sqrt{-1}}-1}\right)^{2m} = \frac{1}{2^{2m}}\left(\frac{\operatorname{Sin} v}{1-\operatorname{Cos} v} - \sqrt{-1}\right)^{2m} = \frac{1}{2^{2m}}\left(\operatorname{Cot}\frac{v}{2} - \sqrt{-1}\right)^{2m} = \frac{\operatorname{Cos} mv - \sqrt{-1}\operatorname{Sin}}{\left(2\operatorname{Sin}\frac{v}{2}\right)^{2m}}$$

terminus primus redit in

$$\frac{\sum_{i=1}^{i=2m-1} A_i \left[\operatorname{Cos}(m-i)v - \sqrt{-1}\operatorname{Sin}(m-i)v\right]}{\left(2\operatorname{Sin}\frac{v}{2}\right)^{2m}}.$$

In posteriori, quoniam

$$\left(\frac{\sqrt{-1}}{e^{v\sqrt{-1}}-1}\right)^{2m+1} = \frac{\operatorname{Cos}(2m+1)\frac{v}{2} - \sqrt{-1}\operatorname{Sin}(2m+1)\frac{v}{2}}{\left(2\operatorname{Sin}\frac{v}{2}\right)^{2m+1}},$$

terminus primus redit in

$$\frac{-\sum_{i=1}^{i=2m\ 2m} A_i\left[\operatorname{Cos}(2m-2i+1)\frac{v}{2} - \sqrt{-1}\operatorname{Sin}(2m-2i+1)\frac{v}{2}\right]}{\left(2\operatorname{Sin}\frac{v}{2}\right)^{2m+1}}.$$

**Itaque ex (32) habentur quatuor hæ admodum generales**

$$\left\{\begin{array}{l}
\sum_{i=1}^{i=2m-1\ 2m-1} A_i \operatorname{Sin}(m-i)v = o, \\[2ex]
\dfrac{\sum_{i=1}^{i=2m-1\ 2m-1} A_i \operatorname{Cos}(m-i)v}{\left(2\operatorname{Sin}\frac{v}{2}\right)^{2m}} - \dfrac{\Gamma(2m)}{v^{2m}} = \dfrac{\mathfrak{B}_{2m-1}}{2m} + \dfrac{\mathfrak{B}_{2m+1}}{2m+2}\cdot\dfrac{v^2}{2!} + \dfrac{\mathfrak{B}_{2m+3}}{2m+4}\cdot\dfrac{v^4}{4!} + \dfrac{\mathfrak{B}_{2m+5}}{2m+6}\cdot\dfrac{v^6}{6!} + \text{&c.} \\[2ex]
\sum_{i=1}^{i=2m\ 2m} A_i \operatorname{Sin}(2m-2i+1)\dfrac{v}{2} = o, \\[2ex]
\dfrac{-\sum_{i=1}^{i=2m\ 2m} A_i \operatorname{Cos}(2m-2i+1)\frac{v}{2}}{\left(2\operatorname{Sin}\frac{v}{2}\right)^{2m+1}} + \dfrac{\Gamma(2m+1)}{v^{2m+1}} = \dfrac{\mathfrak{B}_{2m+1}}{2m+2}\cdot\dfrac{v}{1!} + \dfrac{\mathfrak{B}_{2m+3}}{2m+4}\cdot\dfrac{v^3}{3!} + \dfrac{\mathfrak{B}_{2m+5}}{2m+6}\cdot\dfrac{v^5}{5!} + \text{&c.};
\end{array}\right.$$

**quarum prima et tertia idiomata numerorum $\overset{n}{A}_i$ admodum generalia exhibent, reliquarum vero utraque notandam sistit infinitam seriem summatam *). —**

---

*) Secunda illa et quarta præterea in se continent idioma numerorum $A_i$ id, quod æquatione (12) Part. Iæ exhibetur. Etenim (ut supra est observatum), etiamsi

Duæ heic considerentur positiones particulares. — Posito

1:o) $v = \pi$ ,

æquationum (33) prima identica evadit; tertia dat

$$(34) \quad \ldots\ldots\ldots \overset{i=2m}{\underset{i=1}{S}} (-1)^i \overset{2m}{A_i} = o = \overset{i=2m}{\underset{i=1}{S}} \overset{2m}{C_i} \ ,$$

quæ ipsa est (20) Part. I:æ; at secunda et quarta novas has suppeditant relationes*) :

---

$v = o$ ponatur, istæ valent æquationes seu

$$\left\{ \left( \frac{\frac{1}{2}v}{\mathrm{Sin}\,\frac{1}{2}v} \right)^{2m} \overset{i=2m-1}{\underset{i=1}{S}} \overset{2m-1}{A_i}\ \mathrm{Cos}\,(m-i)\,v = \Gamma(2m) + v^{2m} \times (\text{membr. poster.}) \ , \right.$$

et

$$\left( \left( \frac{\frac{1}{2}v}{\mathrm{Sin}\,\frac{1}{2}v} \right)^{2m+1} \overset{i=2m}{\underset{i=1}{S}} \overset{2m}{A_i}\ \mathrm{Cos}\,(2m-2i+1)\frac{v}{2} = \Gamma(2m+1) - v^{2m+1} \times (\text{membr. poster.}) \right.$$

ex quibus, posità $v = o$, consequitur

$$\overset{i=m}{\underset{i=1}{S}} \overset{m}{A_i} = \Gamma(m+1) \ ,$$

quæ ipsa est æqu. (12) Part. I:æ. —

*) Scilicet ratione habitâ relationum

$$(-1)^i \overset{n}{A_i} = \overset{n}{C_i} \text{ et } (-1)^m . \frac{\overset{i=2m-1}{\underset{i=1}{S}} \overset{2m-1}{C_i}}{2^{2m}} = (2^{2m}-1) \frac{\mathfrak{B}_{2m-1}}{2m} \ , \text{ vid. (10') supra. —}$$

$$(35)\ldots\ldots 2^m\left(2^m-\frac{1}{2^m}\right)\frac{\mathfrak{B}_{2m-1}}{2m}-\frac{\Gamma(2m)}{\pi^{2m}}=\frac{\mathfrak{B}_{2m-1}}{2m}+\frac{\mathfrak{B}_{2m+1}}{2m+2}\cdot\frac{\pi^2}{2!}+$$

$$+\frac{\mathfrak{B}_{2m+3}}{2m+4}\cdot\frac{\pi^4}{4!}+\frac{\mathfrak{B}_{2m+5}}{2m+6}\cdot\frac{\pi^6}{6!}+\text{&c.}$$

atque

$$(36)\ldots\ldots\frac{\Gamma(2m+1)}{\pi^{2m+1}}=\frac{\mathfrak{B}_{2m+1}}{2m+2}\cdot\frac{\pi}{1!}+\frac{\mathfrak{B}_{2m+3}}{2m+4}\cdot\frac{\pi^3}{3!}+\frac{\mathfrak{B}_{2m+5}}{2m+6}\cdot\frac{\pi^5}{5!}+\text{&c.}$$

Ponatur

$$2:o)\quad v=\frac{\pi}{2}\cdot -$$

Quoniam, dum $m$ par est,

$$\left\{\begin{array}{l}
\mathrm{Sin}\,(m-i)\frac{\pi}{2}=(-1)^{\frac{m}{2}-1}\cdot\mathrm{Sin}\frac{i\pi}{2}\ ,\\[2ex]
\mathrm{Cos}(m-i)\frac{\pi}{2}=(-1)^{\frac{m}{2}}\cdot\ \mathrm{Cos}\frac{i\pi}{2}\ ,\\[2ex]
\mathrm{Sin}\,(2m-2i+1)\frac{\pi}{4}=-\mathrm{Cos}\frac{m}{2}\pi.\mathrm{Sin}(2i-1)\frac{\pi}{4}=(-1)^{\frac{m}{2}-1}\cdot\ \mathrm{Sin}\frac{\pi}{4}\left(\mathrm{Sin}\frac{i\pi}{2}-\mathrm{Cos}\frac{i\pi}{2}\right),\\[2ex]
\mathrm{Cos}\,(2m-2i+1)\frac{\pi}{4}=\mathrm{Cos}\frac{m}{2}\pi.\mathrm{Cos}(2i-1)\frac{\pi}{4}=(-1)^{\frac{m}{2}}\cdot\ \mathrm{Sin}\frac{\pi}{4}\left(\mathrm{Sin}\frac{i\pi}{2}+\mathrm{Cos}\frac{i\pi}{2}\right),
\end{array}\right.$$

dum vero $m$ impar

$$\left\{\begin{array}{l}
\mathrm{Sin}\,(m-i)\frac{\pi}{2}=(-1)^{\frac{m-1}{2}}.\mathrm{Cos}\frac{i\pi}{2}\ ,\\[2ex]
\mathrm{Cos}(m-i)\frac{\pi}{2}=(-1)^{\frac{m-1}{2}}.\mathrm{Sin}\frac{i\pi}{2}\ ,\\[2ex]
\mathrm{Sin}\,(2m-2i+1)\frac{\pi}{4}=\mathrm{Sin}\frac{m\pi}{2}.\mathrm{Cos}(2i-1)\frac{\pi}{4}=(-1)^{\frac{m-1}{2}}.\mathrm{Sin}\frac{\pi}{4}\left(\mathrm{Sin}\frac{i\pi}{2}+\mathrm{Cos}\frac{i\pi}{2}\right),\\[2ex]
\mathrm{Cos}\,(2m-2i+1)\frac{\pi}{4}=\mathrm{Sin}\frac{m\pi}{2}.\mathrm{Sin}(2i-1)\frac{\pi}{4}=(-1)^{\frac{m-1}{2}}.\mathrm{Sin}\frac{\pi}{4}\left(\mathrm{Sin}\frac{i\pi}{2}-\mathrm{Cos}\frac{i\pi}{2}\right);
\end{array}\right.$$

prima (33) abit in

$$(37)\ldots\left\{\begin{array}{l}\mathrm{et}\\ \\ \\ \\ \end{array}\right.\left.\begin{array}{l}\sum_{i=1}^{i=m}(-1)^{i-1}A_{2i-1}^{2m-1}=o\\ \\ \sum_{i=1}^{i=m-1}(-1)^{i-1}A_{2i}^{2m-1}=o\end{array}\right\}\ \text{prout } m \text{ par est aut impar,}$$

quæ quidem (ut patet) consectaria ex æqu. (8) Part. I:æ conficiunt coëfficientibus $A_i$. Derivatæ impari ordinis numero; tertia item in

$$(38)\ldots\left\{\begin{array}{l}\mathrm{et}\\ \\ \\ \\ \end{array}\right.\left.\begin{array}{l}\sum_{i=1}^{i=m}(-1)^{i-1}A_{2i-1}^{2m}=-\sum_{i=1}^{i=m}(-1)^{i-1}A_{2i}^{2m}\\ \\ \sum_{i=1}^{i=m}(-1)^{i-1}A_{2i-1}^{2m}=\sum_{i=1}^{i=m}(-1)^{i-1}A_{2i}^{2m}\ ,\end{array}\right\}\ \text{prout } m \text{ par est aut impar,}$$

quas itidem esse consectaria ex æqu. (8) Part. I:æ coëfficientibus $A_i$ Derivatæ pari ordinis numero, facile liquet *). —

Tum secunda (33), prout $m$ par est aut impar, abit in

$$(39)\ldots\ldots \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{1}{2^m} \overset{i=m}{\underset{i=1}{S}} (-1)^{\frac{m}{2}+i} A_{2i} - \left(\dfrac{2}{\pi}\right)^{2m} \Gamma(2m) \\ \text{et} \\ \dfrac{1}{2^m} \overset{i=m}{\underset{i=1}{S}} (-1)^{\frac{m+1}{2}+i} A_{2i-1} - \left(\dfrac{2}{\pi}\right)^{2m} \Gamma(2m) \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{\mathfrak{B}_{2m-1}}{2m} + \frac{1}{2^2} \cdot \frac{\mathfrak{B}_{2m+1}}{2m+2} \cdot \frac{\pi^2}{2!} + \frac{1}{2^4} \cdot \frac{\mathfrak{B}_{2m+3}}{2m+4} \cdot \frac{\pi^4}{4!} + \frac{1}{2^6} \cdot \frac{\mathfrak{B}_{2m+5}}{2m+6} \cdot \frac{\pi^6}{6!} + \text{ &c.}$$

---

*) Scilicet prior, vi æquationis hujus (8), in identicam istam redit:

$$\overset{i=m}{\underset{i=1}{S}} (-1)^{i-1} A^{2m}_{2i-1} = - \overset{i=m}{\underset{i=1}{S}} (-1)^{i-1} A^{2m}_{2m-2i+1} \ ,$$

seu

$$= \overset{i=1}{\underset{i=m}{S}} (-1)^{i-1} A^{2m}_{2i-1} \quad ;$$

posterior autem in

$$\overset{i=m}{\underset{i=1}{S}} (-1)^{i-1} A^{2m}_{2i-1} = \overset{i=m}{\underset{i=1}{S}} (-1)^{i-1} A^{2m}_{2m-2i+1}$$

seu præcedentem ipsam. —

et quarta, vi æquationum (38), in

$$(40)\ldots\ldots \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2^m}\sum_{i=1}^{i=m} (-1)^{\frac{m-2}{2}+i}\, A_{2i}^{2m} + \left(\frac{2}{\pi}\right)^{2m+1} \Gamma(2m+1) \\ \text{et} \\ \frac{1}{2^m}\sum_{i=1}^{i=m} (-1)^{\frac{m-1}{2}+i}\, A_{2i-1}^{2m} + \left(\frac{2}{\pi}\right)^{2m+1} \Gamma(2m+1) \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\mathfrak{B}_{2m+1}}{2m+2}\cdot\frac{\pi}{1!} + \frac{1}{2^3}\frac{\mathfrak{B}_{2m+3}}{2m+4}\cdot\frac{\pi^3}{3!} + \frac{1}{2^5}\frac{\mathfrak{B}_{2m+5}}{2m+6}\cdot\frac{\pi^5}{5!} + \text{&c.}$$

## Corollarium.

Collatis denique æquationibus hisce (39) cum æquatione (35) atque æquationibus (40) cum æqu. (36), memorabiles hæ comparantur relationes:

Prout $m$ par aut impar:

$$(41)\ldots\ldots \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2^m}\sum_{i=1}^{i=m} (-1)^{\frac{m-2}{2}+i}\, A_{2i}^{2m-1} + 2^m\left(2^m - \frac{1}{2^m}\right)\left[\frac{\Gamma(2m)}{\pi^{2m}} + \frac{\mathfrak{B}_{2m-1}}{2m}\right] \\ \text{et} \\ \frac{1}{2^m}\sum_{i=1}^{i=m} (-1)^{\frac{m-1}{2}+i}\, A_{2i-1}^{2m-1} + 2^m\left(2^m - \frac{1}{2^m}\right)\left[\frac{\Gamma(2m)}{\pi^{2m}} + \frac{\mathfrak{B}_{2m-1}}{2m}\right] \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(2 - \frac{1}{2}\right)\frac{\mathfrak{B}_{2m+1}}{2m+2}\cdot\frac{\pi^2}{2!} + \frac{1}{2^2}\left(2^2 - \frac{1}{2^2}\right)\frac{\mathfrak{B}_{2m+3}}{2m+4}\cdot\frac{\pi^4}{4!} + \frac{1}{2^3}\left(2^3 - \frac{1}{2^3}\right)\frac{\mathfrak{B}_{2m+5}}{2m+6}\cdot\frac{\pi^6}{6!} + \text{&c.}$$

Prout $m$ par aut impar:

$$(42)\ldots\frac{1}{2^{m+1}}\sum_{i=1}^{i=m}(-1)^{\frac{m}{2}+i}\,\mathcal{A}_{2i}^{2m}-2^m\left(2^m-\frac{1}{2^m}\right)\frac{\Gamma(2m+1)}{\pi^{2m+1}}$$

et

$$(42')\ldots\frac{1}{2^{m+1}}\sum_{i=1}^{i=m}(-1)^{\frac{m+1}{2}+i}\,\mathcal{A}_{2i-1}^{2m}-2^m\left(2^m-\frac{1}{2^m}\right)\frac{\Gamma(2m+1)}{\pi^{2m+1}}\Bigg\}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(2-\frac{1}{2}\right)\frac{\mathfrak{B}_{2m+1}}{2m+2}\cdot\frac{\pi}{1!}+\frac{1}{2^2}\left(2^2-\frac{1}{2^2}\right)\frac{\mathfrak{B}_{2m+3}}{2m+4}\cdot\frac{\pi^3}{3!}+\frac{1}{2^3}\left(2^3-\frac{1}{2^3}\right)\frac{\mathfrak{B}_{2m+5}}{2m+6}\cdot\frac{\pi^5}{5!}+\&c.$$

---

## *Nota.*

(Vid. pag. 23.)

---

DE SERIEBUS COTANGENTIS, TANGENTIS ET COSECANTIS.

Innumera quæ ex his seriebus redundarunt atque redundabunt Analysi emolumenta optimo sane jure id vindicant, ut perfecto in deductione earum fiat satis rigori Mathematico. Quum tamen in ea re præcessores, ut nobis videntur, non nihil reliqui fecerunt — veteres equidem solitis rationibus, novi autem (et quidem nominatim Cauchy ipse, Schlömilch et alii) in eo quod in certis ab reali in imaginarium transgressionibus atque in usu serierum duplicium justo saltem brevius rem explica-

rint —; facturi nobis esse operæ pretium videbamur, si quas in ea re lacunas relictas expleturi materiem heic breviter retractatam stiterimus. —

1. Habentur identice, $x$ reali aut imaginariâ *),

$$(1)\ldots \operatorname{Sin} x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7} + \&c. = x\left(1 - \frac{x^2}{1^2\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{2^2\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{3^2\pi^2}\right)\ldots\ldots,$$

$$= x\left[\frac{\pi - x}{\pi}\,\frac{\pi + x}{\pi}\right]\left[\frac{2\pi - x}{2\pi}\,\frac{2\pi + x}{2\pi}\right]\left[\frac{3\pi - x}{3\pi}\,\frac{3\pi + x}{3\pi}\right]\ldots;$$

$$(2)\ldots \operatorname{Cos} x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \&c. = \left(1 - \frac{4x^2}{1^2\pi^2}\right)\left(1 - \frac{4x^2}{3^2\pi^2}\right)\left(1 - \frac{4x^2}{5^2\pi^2}\right)\ldots\ldots,$$

$$= \left[\frac{\pi - 2x}{\pi}\,\frac{\pi + 2x}{\pi}\right]\left[\frac{3\pi - 2x}{3\pi}\,\frac{3\pi + 2x}{3\pi}\right]\left[\frac{5\pi - 2x}{5\pi}\,\frac{5\pi + 2x}{5\pi}\right]\ldots\ldots$$

Quarum ex priori (et quidem, si vel $x$ realis ponatur) cognitæ deducuntur numerorum Bernoullii **) summarumque

---

*) Veras has permanere æquationes, etiamsi $x$ imaginaria sit, eâ certe ratione licet probari, ut 1:o) concedantur — id quod omni absque dubitatione fieri potest — cognitæ illæ æquationes, quæ ex. gr. in "Handbuch d. Math. Anal." 1:er Th. (1845) pag. 237 numeris (1)—(4) insignitæ reperiuntur, valere $x$ qualibet imaginariâ: atque 2:o) observentur eadem ipsa ratiocinia, quæ in pag. insequenti ibid. referuntur, valere $x$ imaginariæ æque ac reali. —

**) De ipsa definitione horum numerorum inter Geometras non perfecte convenire videtur; quæ tamen res haudquaquam, ut facile patet, in medio est relinquenda. Schlömilch, auctore Cauchy, numerum Bernoullii $\mathfrak{B}_{2n-1}$ eum statuere vi-

**illarum**

$$S_{2n}=\frac{1}{1^{2n}}+\frac{1}{2^{2n}}+\frac{1}{3^{2n}}+\text{&c.}^{*)},\quad S'_{2n}=\frac{1}{1^{2n}}+\frac{1}{3^{2n}}+\frac{1}{5^{2n}}+\text{ &c.}$$

**relationes. —**

---

detur, qui per $\frac{1}{n}\cdot\frac{2^{2n-1}}{(2n)!}$ multiplicatus coëfficientem ipsius $x^{2n}$ in evoluta functione $l\left(\frac{x}{\text{Sin}\,x}\right)$ conficit. Quibus nos quidem perfecte assentimus; nec locus est heic de re tam apertâ fusius disserendi. — Lege, qua eorum alius ex alio deducatur, non nisi post comparatam seriem Cotangentis opus est. —

*) Qui in hac deductione occurrit, usum serierum duplicium revera esse legitimum, Theoremati convenienter gravissimo Cauchyano (Anal. Algébr. pag. 541), neutiquam est dubitandum, siquidem observes seriem numericam

$$\left(\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}+\frac{x^6}{7!}+\text{&c.}\right),\ \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}+\frac{x^6}{7!}+\text{&c.}\right)^2,\ \frac{1}{3}\left(\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}+\frac{x^6}{7!}+\text{&c.}\right)^3,\ \text{&c.},$$

quippe quæ identica sit huic

$$\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2x}-1\right),\quad \frac{1}{2}\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2x}-1\right)^2,\quad \frac{1}{3}\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2x}-1\right)^3,\ \text{&c.},$$

convergentem certe manere omni $x$ reali, cujus valor numer. certum quemdam limitem (ex. gr. 2) haud excedat. — Scilicet $\frac{e^x-e^{-x}}{2x}$ seu $1+\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}+\text{ &c.}=1$ est, dum $x=o$, crescitque crescente valore ipsius $x$ numerico; attamen, dum hic in 2 accrevit, illa scil. tunc $\frac{1}{4}\left(e^2-\frac{1}{e^2}\right)$ nondum in 2 pervenit, ideoque nondum in unitatem quantitas illa positiva

$$\frac{e^x-e^{-x}}{2x}-1. \ —$$

Posito jam $x = u + v\sqrt{-1}$ expositisque diversarum quæ occurrunt quantitatum modulis, æquationibus (1) et (2) ea quæ rei propria est forma continget. — Scilicet est

$$\operatorname{Sin} x = \frac{e^v + e^{-v}}{2} \operatorname{Sin} u + \sqrt{-1} \cdot \frac{e^v - e^{-v}}{2} \operatorname{Cos} u =$$

$$= \pm \left( \frac{e^{2v} + e^{-2v}}{4} - \tfrac{1}{2} \operatorname{Cos} 2u \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left[ \operatorname{Cos} \operatorname{Arc} \operatorname{Tg} \left( \frac{e^v - e^{-v}}{e^v + e^{-v}} \operatorname{Cot} u \right) + \right.$$

$$\left. + \sqrt{-1} \operatorname{Sin} \operatorname{Arc} \operatorname{Tg} \left( \frac{e^v - e^{-v}}{e^v + e^{-v}} \operatorname{Cot} u \right) \right],$$

prout $\operatorname{Sin} u$ positiva est aut negativa;

$$x = \pm (u^2 + v^2)^{\frac{1}{2}} \cdot \left[ \operatorname{Cos} \operatorname{Arc} \operatorname{Tg} \frac{v}{u} + \sqrt{-1} \operatorname{Sin} \operatorname{Arc} \operatorname{Tg} \frac{v}{u} \right],$$ prout $u$ pos. est aut neg.

$$\frac{n\pi - x}{n\pi} = \pm \left( \frac{\overline{\quad}^2}{\frac{n\pi - u + v^2}{n^2\pi^2}} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left[ \operatorname{Cos} \operatorname{Arc} \operatorname{Tg} \frac{v}{n\pi - u} - \sqrt{-1} \operatorname{Sin} \operatorname{Arc} \operatorname{Tg} \frac{v}{n\pi + u} \right],$$

prout $n\pi - u$ pos. aut neg.

atque

$$\frac{n\pi + x}{n\pi} = \pm \left( \frac{\overline{\quad}^2}{\frac{n\pi + u + v^2}{n^2\pi^2}} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left[ \operatorname{Cos} \operatorname{Arc} \operatorname{Tg} \frac{v}{n\pi - u} + \sqrt{-1} \operatorname{Sin} \operatorname{Arc} \operatorname{Tg} \frac{v}{n\pi + u} \right],$$

prout $n\pi + u$ pos. aut neg.

Itaque secundum (1), certe nisi qua ipsarum $u$ et $n\pi \pm u = o$

fuerit *), vera erit una vel altera æquationum

$$(3)\ldots\ \pm\left(\frac{e^{2v}+e^{-2v}}{4}--\tfrac{1}{2}\operatorname{Cos}2u\right)^{\frac{1}{2}}\left[\operatorname{Cos}\operatorname{ArcTg}\left(\frac{e^{v}-e^{-v}}{e^{v}+e^{-v}}\operatorname{Cot}u\right)+\sqrt{-1}\operatorname{Sin}\operatorname{ArcTg}\left(\frac{e^{v}-e^{-v}}{e^{v}+e^{-v}}\operatorname{Cot}u\right)\right]=$$

$$=(u^2+v^2)^{\frac{1}{2}}\left(\operatorname{Cos}\operatorname{ArcTg}\frac{v}{u}+\sqrt{-1}\operatorname{Sin}\operatorname{ArcTg}\frac{v}{u}\right)\times$$

$$\times\left(\frac{\overline{\pi-u}^2+v^2}{\pi^2}\cdot\frac{\overline{\pi+u}^2+v^2}{\pi^2}\right)^{\frac{1}{2}}\left[\operatorname{Cos}\left(\operatorname{ArcTg}\frac{v}{\pi-u}-\operatorname{ArcTg}\frac{v}{\pi+u}\right)-\sqrt{-1}\operatorname{Sin}\left(\operatorname{ArcTg}\frac{v}{\pi-u}-\operatorname{ArcTg}\frac{v}{\pi+u}\right)\right]\times$$

$$\times\left(\frac{\overline{2\pi-u}^2+v^2}{2^2\pi^2}\,\frac{\overline{2\pi+u}^2+v^2}{2^2\pi^2}\right)^{\frac{1}{2}}\left[\operatorname{Cos}\left(\operatorname{ArcTg}\frac{v}{2\pi-u}--\operatorname{ArcTg}\frac{v}{2\pi+u}\right)-\sqrt{-1}\operatorname{Sin}\left(\operatorname{ArcTg}\frac{v}{2\pi-u}-\operatorname{ArcTg}\frac{v}{2\pi+u}\right)\right]\times$$

&c.

i. e. alterutra quantitatum membri prioris certe est limes, in quem crescente $n$ indefinite tendit productum

$$(4)\ldots(u^2+v^2)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\overline{\pi-u}^2+v^2}{\pi^2}\cdot\frac{\overline{\pi+u}^2+v^2}{\pi^2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\overline{2\pi-u}^2+v^2}{2^2\pi^2}\cdot\frac{\overline{2\pi+u}^2+v^2}{2^2\pi^2}\right)^{\frac{1}{2}}\ldots\ldots\left(\frac{\overline{n\pi-u}^2+v^2}{n^2\pi^2}\cdot\frac{\overline{n\pi+u}^2+v^2}{n^2\pi^2}\right)^{\frac{1}{2}}\times$$

$$\times\left\{\operatorname{Cos}\left[\operatorname{ArcTg}\frac{v}{u}-\left(\operatorname{ArcTg}\frac{v}{\pi-u}-\operatorname{ArcTg}\frac{v}{\pi+u}\right)-\ldots-\left(\operatorname{ArcTg}\frac{v}{n\pi-u}-\operatorname{ArcTg}\frac{v}{n\pi+u}\right)\right]+\right.$$

$$\left.+\sqrt{-1}\operatorname{Sin}\left[\operatorname{ArcTg}\frac{v}{u}-\ldots\ldots-\left(\operatorname{ArcTg}\frac{v}{n\pi-u}-\operatorname{ArcTg}\frac{v}{n\pi+u}\right)\right]\right\}.$$

---

*) Ista equidem positio particularis reverá in iis, quæ heic allata sunt, comprehenditur salvis certe reservatis quibusdam; nos tamen, ne in ineptam abiret verbositatem oratio — quippe quod metam heic nobis propositam, omni hujusce positionis ratione posthabitâ, contingere possumus —, totam hanc rem in præsenti intactam relicturi id solum monitum voluimus, quod ipsi moduli quantitatum supra descriptarum

At quantitati (imaginariæ), in quam crescente $n$ indefinite tendit (4), modulus necessario erit is, in quem limitem tendit prior linea ipsius (4). Quo concesso res jam in aprico posita est. Etenim ex eo rectà consequitur non modo esse, $u$ et $v$ realibus quibuscumque,

$$(5) \ldots\ldots \frac{1}{2}\left(\frac{e^{2v}+e^{-2v}}{2} - \operatorname{Cos} 2u\right) =$$

$$= (u^2+v^2)\left(\frac{\overline{\pi-u+v^2}^2}{\pi^2}\cdot\frac{\overline{\pi+u+v^2}^2}{\pi^2}\right)\left(\frac{\overline{2\pi-u+v^2}^2}{2^2\pi^2}\cdot\frac{\overline{2\pi+u+v^2}^2}{2^2\pi^2}\right)\left(\frac{\overline{3\pi-u+v^2}^2}{3^2\pi^2}\cdot\frac{\overline{3\pi+u+v^2}^2}{3^2\pi^2}\right) \text{ &c.}$$

sed etiam, saltem nisi qua ipsarum $u$ et $n\pi \pm u = o$ sit,

$$\operatorname{Arc Tg}\left(\frac{e^v-e^{-v}}{e^v+e^{-v}}\operatorname{Cot} u\right) + k\pi = \operatorname{Arc Tg}\frac{v}{u} - \left(\operatorname{Arc Tg}\frac{v}{\pi-u} - \operatorname{Arc Tg}\frac{v}{\pi+u}\right) -$$

$$-\left(\operatorname{Arc Tg}\frac{v}{2\pi-u} - \operatorname{Arc Tg}\frac{v}{2\pi+u}\right) -$$

$$-\left(\operatorname{Arc Tg}\frac{v}{3\pi-u} - \operatorname{Arc Tg}\frac{v}{3\pi+u}\right) -$$

&c.

de quo $k$ id saltem cognitum est, quod valore numerico integro aut $o$ necessario erit. At facile patebit esse quantitatem

---

nullo modo ab reservatis nuperrime commemoratis pendent (quippe quæ reservata nil aliud spectant, nisi quid per "ArcTang" rite intelligatur); quam ob caussam nobis licitum erat in æquationibus illis (5) et (5′) restrictionem "certe nisi qua ipsarum $u$ et $n\pi \pm u = o$ fuerit" plane omittere. —

$k$ a $v$ minime pendentem. Etenim ArcTg membri prioris continua est functio ipsius $v$ ($u$ quâlibet tali quæ heic consideratur) nec minus summa illa arcuum "ArcTg" in membro posteriori *); ideoque alter ab alterâ discrepare nequit tali quadam functione ipsius $v$, cui non nisi integri contingant valores numerici per $\pi$ multiplicati. — Et quoniam, dum $v=o$, $k=o$ est; pro certo jam statui licet esse

$$(6)\ldots\ldots \operatorname{Arc\,Tg}\left(\frac{e^{v}-e^{-v}}{e^{v}+e^{-v}}\operatorname{Cot} u\right)=\operatorname{ArcTg}\frac{v}{u}-\left(\operatorname{ArcTg}\frac{v}{\pi-u}-\operatorname{Arc\,Tg}\frac{v}{\pi+u}\right)-$$
$$-\left(\operatorname{Arc\,Tg}\frac{v}{2\pi-u}-\operatorname{ArcTg}\frac{v}{2\pi+u}\right)-$$
$$-\left(\operatorname{ArcTg}\frac{v}{3\pi-u}-\operatorname{ArcTg}\frac{v}{3\pi+u}\right)-$$
$$\&c.$$

*) Nam positâ

$$\varphi(v)=\operatorname{ArcTg}\frac{v}{u}-\left(\operatorname{ArcTg}\frac{v}{\pi-u}-\operatorname{ArcTg}\frac{v}{\pi+u}\right)-\left(\operatorname{ArcTg}\frac{v}{2\pi-u}-\operatorname{ArcTg}\frac{v}{2\pi+u}\right)-\&c.$$

quoniam series illa membri posterioris $v$ quâlibet convergens erat [secundum æqu. illam post (3)], habetur $-_{\varepsilon}$ denotante numerum perexiguum —

$$\varphi(v+\varepsilon)-\varphi(v)=\left\{\begin{matrix}\operatorname{Arc\,Tg}\frac{v+\varepsilon}{u}\\ -\operatorname{ArcTg}\frac{v}{u}\end{matrix}\right\}-\left\{\begin{matrix}\operatorname{Arc\,Tg}\frac{v+\varepsilon}{\pi-u}-\operatorname{ArcTg}\frac{v+\varepsilon}{\pi+u}\\ -\operatorname{ArcTg}\frac{v}{\pi-u}+\operatorname{Arc\,Tg}\frac{v}{\pi+u}\end{matrix}\right\}-\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots-\left\{\begin{matrix}\operatorname{Arc\,Tg}\frac{v+\varepsilon}{n\pi-u}-\operatorname{ArcTg}\frac{v+\varepsilon}{n\pi+u}\\ -\operatorname{ArcTg}\frac{v}{n\pi-u}+\operatorname{ArcTg}\frac{v}{n\pi+u}\end{matrix}\right\}-\quad\&c.$$

ex quo patet non modo in tantum perveniri licere $n$, ut summa terminorum sequen-

Eodem plane modo, quoniam

$$\mathrm{Cos}\,x = \frac{e^v+e^{-v}}{2}\mathrm{Cos}\,u - \sqrt{-1}\,\frac{e^v-e^{-v}}{2}\,\mathrm{Sin}\,u =$$

$$= \pm\left(\frac{e^{2v}+e^{-2v}}{4}+\tfrac{1}{2}\mathrm{Cos}\,2u\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left[\mathrm{CosArcTg}\left(\frac{e^v-e^{-v}}{e^v+e^{-v}}\mathrm{Tg}\,u\right)-\sqrt{-1}\,\mathrm{SinArcTg}\left(\frac{e^v-e^{-v}}{e^v+e^{-v}}\mathrm{Tg}\,u\right)\right]$$

prout $\mathrm{Cos}\,u$ positiva est aut negativa,

ex (2) consequitur non modo esse, $u$ et $v$ realibus quibuscumque,

$$(5')\ldots\ldots\ \frac{1}{2}\left(\frac{e^{2v}+e^{-2v}}{2}+\mathrm{Cos}\,2u\right) =$$

$$= \left(\frac{\overline{\pi-2u+4v^2}^2}{\pi^2}\cdot\frac{\overline{\pi+2u+4v^2}^2}{\pi^2}\right)\left(\frac{\overline{3\pi-2u+4v^2}^2}{3^2\pi^2}\cdot\frac{\overline{3\pi+2u+4v^2}^2}{3^2\pi^2}\right)\left(\frac{\overline{5\pi-2u+4v^2}^2}{5^2\pi^2}\cdot\frac{\overline{5\pi+2u+4v^2}^2}{5^2\pi^2}\right)\&c.,$$

sed etiam, saltem nisi qua ipsarum $\frac{m\pi}{2}\pm u = o$ sit ($m$ impar),

$$(6')\ldots\ldots\mathrm{ArcTg}\left(\frac{e^v-e^{-v}}{e^v+e^{-v}}\mathrm{Tg}\,u\right) =$$

$$= \left(\mathrm{ArcTg}\frac{v}{\frac{\pi}{2}-u}-\mathrm{ArcTg}\frac{v}{\frac{\pi}{2}+u}\right)+\left(\mathrm{ArcTg}\frac{v}{\frac{3\pi}{2}-u}-\mathrm{ArcTg}\frac{v}{\frac{3\pi}{2}+u}\right)+$$

$$+\left(\mathrm{ArcTg}\frac{v}{\frac{5\pi}{2}-u}-\mathrm{ArcTg}\frac{v}{\frac{5\pi}{2}+u}\right)+$$

&c.

---

tium (quotquot summentur) evanescens fiat quantitas ($\varepsilon$ quolibet), sed etiam ipsum $\varepsilon$ tam exiguum assumi posse, ut summa terminorum anteeedentium ideoque ipsa differentia $\varphi(v+\varepsilon)-\varphi(v)$ valore numerico $<$ dato quovis evadat. —

2. Omissis in præsenti, quæ ex (5) et (5′) deducantur, formulis specialibus sufficit in mentem revocare, formularum sequentium primam ex (6) tum secundam ex (6′) atque ex iis tertiam deduci rite licere modo, quem in "Handbuch d. Mathem. Analysis" pag. 270—272 eleganter adhibuit Cel. Schlömilch:

$$(7)\ldots\ldots\begin{cases} u\operatorname{Cot}u = 1-2u^2.\left(\dfrac{1}{\pi^2-u^2}+\dfrac{1}{(2\pi)^2-u^2}+\dfrac{1}{(3\pi)^2-u^2}+\text{&c.}\right), \\ \operatorname{Tang}u = 2u\left(\dfrac{1}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2-u^2}+\dfrac{1}{\left(\frac{3\pi}{2}\right)^2-u^2}+\dfrac{1}{\left(\frac{5\pi}{2}\right)^2-u^2}+\text{&c.}\right), \\ u\operatorname{Cosec}u = 1+2u^2.\left(\dfrac{1}{\pi^2-u^2}-\dfrac{1}{(2\pi)^2-u^2}+\dfrac{1}{(3\pi)^2-u^2}-\text{&c.}\right), \end{cases}$$

atque ex iis (ibidem*) tandem

$$(8)\ldots\begin{cases} \frac{u}{2}\operatorname{Cot}\frac{u}{2} = 1-\dfrac{\mathfrak{B}_1}{2!}u^2-\dfrac{\mathfrak{B}_3}{4!}u^4-\dfrac{\mathfrak{B}_5}{6!}u^6-\text{&c.}\ \ [2\pi>u>-2\pi], \\ \frac{1}{2}\operatorname{Tg}\frac{u}{2} = (2^2-1)\dfrac{\mathfrak{B}_1}{2!}u+(2^4-1)\dfrac{\mathfrak{B}_3}{4!}u^3+(2^6-1)\dfrac{\mathfrak{B}_5}{6!}u^5+\text{&c.}\ \ [\pi>u>-\pi], \\ \frac{u}{2}\operatorname{Cosec}\frac{u}{2} = 1+\left(1-\frac{1}{2}\right)\dfrac{\mathfrak{B}_1}{2!}u^2+\left(1-\frac{1}{2^3}\right)\dfrac{\mathfrak{B}_3}{4!}u^4+\left(1-\frac{1}{2^5}\right)\dfrac{\mathfrak{B}_5}{6!}u^6+\text{&c.}\ \ [2\pi>u>-2\pi]. \end{cases}$$

—

Tres quoque valere novissimas, etiamsi $u$ imaginaria sit et quidem modulo iisdem reservatis subjecto, quibus heic valor

---

*) Immutasse nos paullulum et quidem, ut nobis videtur, rei magis convenienter ipsum habitum sex harum æquationum, ingenue confitemur. —

ipsius $u$ numericus, facile patet rationibus quas primæ earum applicatas heic paucis adferre liceat. — Ex ea habetur (pos. $2u$ loco $u$)

$$(9)\ldots\ \frac{u\,\mathrm{Cos}\,u}{\mathrm{Sin}\,u}\ \text{seu}\ \frac{1-\frac{u^2}{2!}+\frac{u^4}{4!}-\text{&c.}}{1-\frac{u^2}{3!}+\frac{u^4}{5!}-\text{&c.}}=1-\frac{\mathfrak{B}_1}{2!}(2u)^2-\frac{\mathfrak{B}_3}{4!}(2u)^4-\text{&c.}\ \ [\pi>u>-\pi],$$

ideoque

$$(9')\ldots 1-\frac{u^2}{2!}+\frac{u^4}{4!}-\text{&c.}=\left(1-\frac{u^2}{3!}+\frac{u^4}{5!}-\text{&c.}\right)\left(1-\frac{\mathfrak{B}_1}{2!}(2u)^2-\frac{\mathfrak{B}_3}{4!}(2u)^4-\text{&c.}\right).-$$

Quoniam series illæ membri posterioris non modo ipsæ convergentes sunt, sed etiam substitutis terminorum loco valoribus eorum numericis ($<\pi$) convergentes permanent; ex primis doctrinæ serierum principiis constat, prius illud membrum identicum esse expressioni, quæ adhibitâ in membro posteriori regulâ illâ multiplicationis serierum comparatur.

At series ambæ membri posterioris, etiamsi $u$ imaginaria sit et quidem modulo infra $\pi$, convergentes et ipsæ sunt et substitutis terminorum loco modulis permanent. Itaque loco productı earum substitui licet membrum prius — quippe quod eam ipsam conficit expressionem, quæ adhibitâ regulâ illa multiplicationis serierum comparatur ($u$ reali æque ac imaginariâ) —; i. e. æquatio (9′), ideoque etiam ipsa (9), justa est etiam $u$ ima-

ginariâ et quidem modulo infra $\pi$ *). —

Posito igitur ex. gr. $v\sqrt{-1}$ loco $u$, æquationes (7) functiones illas

$$v.\frac{e^v+e^{-v}}{e^v-e^{-v}}\ ,\quad \frac{e^v-e^{-v}}{e^v+e^{-v}}\ ,\quad \frac{v}{e^v-e^{-v}}$$

secundum $v$ explicatas sistunt **), nec non facili transgressione habentur æquationes iis, quæ in Partibus his primis ambabus "Exercitationum" allatæ sunt, intime conjunctæ sequentes:

$$(10).....\begin{cases}\dfrac{v}{e^v-1}=1-\dfrac{v}{2}+\dfrac{\mathfrak{B}_1}{2!}v^2-\dfrac{\mathfrak{B}_3}{4!}v^4+\dfrac{\mathfrak{B}_5}{6!}v^6-\text{&c.}\ \ [2\pi>v>-2\pi]\ ,\\ \dfrac{1}{e^v+1}=\tfrac{1}{2}-(2^2-1)\dfrac{\mathfrak{B}_1}{2!}v+(2^4-1)\dfrac{\mathfrak{B}_3}{4!}v^3-(2^6-1)\dfrac{\mathfrak{B}_5}{6!}v^5+\text{&c.}\ [\pi>v>-\pi];\end{cases}$$

quas etiam valere $v$ imaginariâ et quidem modulo iisdem reservatis subjecto, quibus heic valor illius numericus, eâdem ratione ac supra patebit. —

---

*) Sufficientem hanc esse rationem, nemini certe veniet in mentem dubitare. De ratione in "Handbuch" Cel. Schlömilch pag. 276 allatâ, "weil die Reihen deren Quotienten unsere Gleichungen darstellen, auch für imaginäre $u$ Bedeutung haben", non idem potest dici. —

**) Vid. ex. gr. Schlömilch "Handbuch" pag. 276, 277. —

Postscriptum. — Æquationes illas maximi momenti (5),(6) et (5′),(6′) nos in præcedentibus ex (1) et (2) directe et quidem nullo Logarithmorum sermone illato deduximus. Non ita quidem Cel. Schlömilch in "Handbuch" suo pag. 266—269. Quo facto quamquam jure quodam ille "trans amnem ivisse aquatum" judicari posset, negari tamen non licet alia logarithmorum ope redundare deductioni formularum emolumenta et quidem nominatim in parte formularum reali ab imaginariâ separanda. Verumenimvero tali viâ procedenti primum id negotium esse decet injunctum, ut debitâ in signis logarithmorum adhibendis utatur circumspectione. Quod cum Cel. q.d. auctor hoc saltem loco non omnino perfecit, at tamen haud parum refert ut res quoque hac viâ perducta rite censeatur; pauca nos tandem de hac materie adjunxisse verba juvabit. —

Loco æquationis (1) substitui licet — $\lambda(x)$ denotante "logarithmorum ipsius $x$ Naturalium quemlibet" —, saltem nisi qua ipsarum $x$ et $n\pi \pm x = o$ sit,

$$\operatorname{Sin} x = e^{\lambda(x)} \cdot e^{\lambda\left(\frac{\pi-x}{\pi}\right)+\lambda\left(\frac{\pi+x}{\pi}\right)} \cdot e^{\lambda\left(\frac{2\pi-x}{2\pi}\right)+\lambda\left(\frac{2\pi+x}{2\pi}\right)} \cdot \&c.$$

$$= e^{\lambda(x)+\left[\lambda\left(\frac{\pi-x}{x}\right)+\lambda\left(\frac{\pi+x}{x}\right)\right]+\left[\lambda\left(\frac{2\pi-x}{2\pi}\right)+\lambda\left(\frac{2\pi+x}{2\pi}\right)\right]+\ \&c.}$$

ex quo patet esse

(11) . . . . . unum logarithmorum $l((\mathrm{Sin}\, x)) =$

$$= \lambda(x) + \left[\lambda\left(\frac{\pi - x}{\pi}\right) + \lambda\left(\frac{\pi + x}{\pi}\right)\right] + \left[\lambda\left(\frac{2\pi - x}{2\pi}\right) + \lambda\left(\frac{2\pi + x}{2\pi}\right)\right] + \text{&c.}$$

Posito jam $x = u + v\sqrt{-1}$ ($u$ et $v$ reales), habetur

$$l((\mathrm{Sin}\, x)) = \tfrac{1}{2} l\left(\frac{e^{2v} + e^{-2v}}{4} - \tfrac{1}{2}\mathrm{Cos}\, u\right) + \mathrm{ArcTg}\left(\frac{e^{v} - e^{-v}}{e^{v} + e^{-v}}\mathrm{Cot}\, u\right).\sqrt{-1} + l((\pm 1)),$$

prout $\mathrm{Sin}\, u$ positiva aut negativa est *),

$l((x)) = \tfrac{1}{2} l(u^2 + v^2) + \sqrt{-1}\,\mathrm{ArcTg}\frac{v}{u} + l((\pm 1))$, prout $u$ positiva est aut negativa,

atque, dum $n$ numerus est integer,

$$\begin{cases} l\left(\left(\frac{n\pi - x}{n\pi}\right)\right) = \tfrac{1}{2} l\left(\frac{\overline{n\pi - u + v^2}^{2}}{n^2\pi^2}\right) - \sqrt{-1}\,\mathrm{ArcTg}\frac{v}{n\pi - u} + l((\pm 1)), \text{ prout } n\pi - u \\ \qquad\qquad \text{pos. est aut neg.} \\ l\left(\left(\frac{n\pi + x}{n\pi}\right)\right) = \tfrac{1}{2} l\left(\frac{\overline{n\pi + u + v^2}^{2}}{n^2\pi^2}\right) + \sqrt{-1}\,\mathrm{ArcTg}\frac{v}{n\pi + u} + l((\pm 1)), \text{ prout } n\pi + u \\ \qquad\qquad \text{pos. est aut neg.} \end{cases}$$

Itaque, collatâ parte reali membri prioris (11) cum parte reali posterioris factâque deinde transgressione ab logarithmis in numeros, directo comparatur æqu. illa (5). Collatis autem coëfficientibus ipsius $\sqrt{-1}$ habetur æqu. illa intermedia inter (5)

---

*) De positione illa particulari "$u$ aut aliqua ipsarum $n\pi \pm u = o$" vid. notulam in pag. 31 præcedenti. —

et (6) *), ex qua eodem plane modo ac supra deducitur ipsa (6). —

Quidnam de æquationibus (5′) et (6′) ex æqu. (2) ope logarithmorum deducendis sit dicendum, ex allatis plane apparet. —

---

*) Quantitas illa $k\pi$ [quæ quidem reverâ $= o$ esse probatur, ut supra] ex terminis illis signo $l((\pm 1))$ notatis proveniret. — Hanc "a priori" $= o$ statuere seu, ut reverâ loco cit. egit Cel. Schlömilch, silentio prætermittere haud utique convenit circumspectioni, qua in logarithmis adhibendis uti decet. Id certe a priori patet quod, quoniam ab $n$ quodam ambæ $n\pi \pm u$ positivæ sunt atque licitum erat quemlibet sumere logarithmum uniuscujusque termini formæ $\frac{n\pi - x}{n\pi}$ et $\frac{n\pi + x}{n\pi}$, licuit in (11) loco ipsius

$$\lambda\left(\frac{n\pi - x}{n\pi}\right) + \lambda\left(\frac{n\pi + x}{n\pi}\right)$$

ab hoc $n$ inde substitui istam

$$\frac{1}{2} l\left(\frac{\overline{n\pi - u + v^2}^2}{n^2\pi^2}\right) + \frac{1}{2} l\left(\frac{\overline{n\pi + u + v^2}^2}{n^2\pi^2}\right) - \sqrt{-1}\left(\mathrm{ArcTg}\frac{v}{n\pi - u} - \mathrm{ArcTg}\frac{v}{n\pi + u}\right). \quad —$$

# DOCTRINÆ SERIERUM INFINITARUM

## EXERCITATIONES.

AUCTORE

**EM. GABR. BJÖRLING.**

## PARS I:MA.

## *Corrigenda.*

Pag. 79. Lin. 5 loco Sin. *leg.* Cos.

" 84. " ultimâ post sign. = *adponatur* 1 +

" 85. " antepenult. loco $< 1$ *leg.* $< \frac{\pi}{4}$

DOCTRINÆ SERIERUM INFINITARUM

EXERCITATIONES.

---

# PARS I:MA.

## *Nota in Theorema Binomiale.*

Satis superque cognitum est, æquationem illam

(I) . . . . . $(1+x)^y = 1+y_1x+y_2x^2+y_3x^3+$ &c.

veram esse $y$ reali quâlibet atque $x$ quantitate quàlibet (reali æque ac imaginariâ) modulo $< 1$ præditâ. Nec latet, haud modica Analysi contigisse emolumenta ex positione illâ

$$x = u\,(\mathrm{Cos}\,w + \sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}\,w)$$

in hac æquatione (I). —

Quæ cum ita sint, non satis queo mirari quid sit quod nusquam — quod nos quidem sciamus — veritas hujusce æquationis (I) in genere (h. e. $y$ ipsâ quantitate quâlibet, reali æque ac imaginariâ) rite fuerit probata atque emolumenta, quæ inde Analysi contingant, exposita *). Nobis est propositum

---

*) Verum quidem est, Geometram illum sempiternâ memoriâ recolendum Abel præclara in Dissertatione (Oeuvres Complètes T. I) seriem membri posterioris (I)

hoc loco probare *), æquationem de qua quæritur veram esse omnibus

$$(1) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \begin{cases} x = u(\mathrm{Cos}\, w + \sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}\, w), \\ y = a(\mathrm{Cos}\, b + \sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}\, b), \end{cases}$$

$u$, $w$, $a$ et $b$ reales denotantibus quantitates, dummodo $u$ nu-

---

summatam, $v$ reali æque ac imaginariâ ipsâque $u$ non modo numeriee $< 1$ sed etiam $= \pm 1$, primum illum quidem præbuisse. Nihilominus ea, quæ in sequentibus occurrunt, attentione Geometrarum satis digna putamus. Nam præterquam quod *Abel* in æquatione illa (1'), suo more descriptâ, tertium plane omisit membrum — quod si omittatur, præclara illa æquationis (1) universitas sub sensum cadere nequit —, modus ipse probandi veram esse æquationem, dum $u$ numerice $< 1$ est, nimiâ laborat prolixitate (decem usque paginarum in 4:o spatium subtendit argumentatio) ac difficilis ultra quam decet esse videtur. Nec id solum: *Abel*, quamquam in principio paucis et quasi obiter modum indicaverat, quo in æquatione formæ (1) partem realem ab imaginariâ separari liceat -- cujus equidem explicationis ante omnia instituendæ illi opus erat sequentibus —, tamen comparatâ demum æquatione separationem istam plane omisit eamque ipsam ob caussam (ut opinor) quodammodo se fructu victoriæ defraudavit, æquationibus inquam vel maximi momenti (II). Quas si exposuisset, fieri non potest quin solitas illas positiones speciales majori dignas attentione judicaturus esset, quam quæ iis in Dissertatione obtigerit, quippe quarum non nisi paucas passim consideraverit Auctor easdemque — si solas eas exceperis, quæ hoc signis (II. A. a.), (II. A. b') et (II. A) notatæ sunt — obiter tantummodo et quidem ita ut ne in iis quidem pars realis ab imaginaria fuerit separata. — Verumenimvero his atque aliis animadversionibus, quas levioris plerasque momenti in Dissertationem permultis nominibus excellentem intendere liceat, Auctorem inclytissimum optimo jure excusatum putamus ratione habitâ iniquæ sortis, quâ ad ævum usque illius depressa fuerat doctrina quantitatum imaginariarum æque ac serierum infinitarum.

Objectiones quasdam gravioris admodum momenti in eam Dissertationis q. d. partem, quæ æquationem illam (1) pro $u = \pm 1$ tractatam sistit, jure licet adferri. Qua de re in Parte Exercitationum nostr. sequenti erit videndum. —

*) Modus ipse probandi illi consimilis, quo in "Cours d'Analyse" utitur Illustr. Cauchy in æquatione (1) — [$y$ reali] — demonstrandâ, totus est Analyseos s. d. inferioris. —

merice $< 1$ sit; quo facto breviter quæ inde Analysi s. d. inferiori et quidem nominatim doctrinæ serierum infinitarum proficiscantur emolumenta investigabimus *). —

## §. 1.

1. Seriem illam membri posterioris (I) convergentem esse, $x$ et $y$ quibuscumque formæ (1), dummodo $u$ numerice $< 1$ sit, corollarii instar sequitur ex universali hoc

THEOR. I. Series illa

(2) . . . . . $\mathfrak{A}_0$, $\mathfrak{A}_1 x$, $\mathfrak{A}_2 x^2$, $\mathfrak{A}_3 x^3$, &c.

($x$ et $\mathfrak{A}$ diversæ reales sint aut imaginariæ) convergens est aut divergens,

(3) . . . . prout Mod. $x \gtrless \frac{1}{\sqrt[n]{\text{Mod.}\mathfrak{A}_n}}$ pro $n$ quodam ac quolibet majori. —

Demonstr. Constat **), seriem

(4) . . $\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_1 u(\text{Cos}w + \sqrt{-1}\text{Sin}w), \mathfrak{A}_2 u^2(\text{Cos}2w + \sqrt{-1}\text{Sin}2w), \mathfrak{A}_3 u^3(\text{Cos}3w + \sqrt{-1}\text{Sin}3w),$ &c.

($u$ et $w$ reales) convergentem esse aut divergentem, prout, $n$ quodam ac quolibet majori,

$$\sqrt[n]{\text{mod.}\mathfrak{A}_n u^n(\text{Cos}\,nw + \sqrt{-1}\,\text{Sin}\,nw)} \gtrless 1 \text{ est},$$

seu, loco $\mathfrak{A}_n$ pos. $R_n(\text{Cos}\theta_n + \sqrt{-1}\text{Sin}\theta_n)$ — [$R_n$ denot. modulum ipsius $\mathfrak{A}_n$] —

*) Quid ex diversis in §:o 2:o allatis seriebus redundet commodi doctrinæ Integralium Definitorum, explicaturos nos alio quodam tempore fore speramus.

**) Vid. ex. gr. Cauchy, Anal. Algébr. p. 280.

$$\text{prout } \sqrt[n]{\text{mod.} R_n u^n (\text{Cos}[nw+\theta_n] + \sqrt{-1}\,\text{Sin}[nw+\theta_n])} \leqq 1 ,$$

seu

$$\text{val. numer. } u \times \sqrt[n]{R_n} \leqq 1 ,$$

seu

(5)....prout val. num. $u \leqq \dfrac{1}{\sqrt[n]{\text{mod. } \mathfrak{A}_n}}$ est pro $n$ quodam et quolibet majori. —

At quoties in serie (2) $x$ tali sit modulo, ut uni vel alteri conditionum (5) fiat satis; toties — id quod ex eo patet quod semper $x$-valorem formâ illâ $u(\text{Cos}\, w + \sqrt{-1}\,\text{Sin}\, w)$ indui licet, in qua val. num. $u$ ipse sit modulus hujus $x$ — satis est factum priori vel posteriori conditionum (5). Ideoque &c. &c.

Q. E. D.

Cor. 1. Constat, seriem

(2′) . . . . . $\alpha_0$, $\alpha_1 x$, $\alpha_2 x^2$, $\alpha_3 x^3$, &c. (coëfficientibus $\alpha$ realibus) convergentem esse aut divergentem,

(5′)... prout Mod. $x \leqq \dfrac{1}{\sqrt[n]{\text{val. num. } \alpha_n}}$ pro $n$ quodam et quolibet majori.

Comparatis jam inter se seriebus (2) et (2′) exallatis patet, si fuerit hæc (2′) convergens vi conditionis (5′) certis ipsius x coëfficientiumque $\alpha$ valoribus, fore ut illa (2) quoque convergens sit iisdem $x$ ac talibus coëfficientium $\mathfrak{A}$ valoribus, quorum moduli iidem sint ac nume-

rici illi valores coëfficientium $\alpha$. Ex quo rectâ consequitur hoc

Cor. 2. Quoniam series

$$1,\ y_1x,\ y_2x^2,\ y_3x^3,\ \&c.$$

vi conditionis (3′) convergens est, dum Mod.$x$ infra 1 est, quoscumque ipsi $y$ tribuis valores reales; fieri non potest quin convergens permaneat, dum Mod.$x$ infra 1 est, quoscumque ipsi $y$ tribuis valores reales æque ac imaginarias. —

2. Priusquam ulterius progredimur, ne in sequentibus abrumpatur filum orationis, hoc jam probetur

Theor. II. Si fuerit series terminorum realium

(6) . . . . . $f_1(x),\ f_2(x),\ f_3(x),$ &c.

convergens $x$ reali qualibet ab $x_0$ inde usque ad $X$ (limitibus inclusive) atque præterea termini functiones ipsius $x$ inter hos limites continuas conficiant; fieri non potest quin summa ipsa

(7) . . . . . $f_1(x)+f_2(x)+f_3(x)+$ &c.

continua eosdem inter limites sit functio ipsius $x$ *). —

---

*) Gravissimum hoc doctrinæ serierum infinitarum Theorema reverà Cauchy auctori debetur. Verumenimvero generi, quo in eo utitur, loquendi (Anal. Algébr. p. 131) "Lorsque les différens termes de la série $u_0$, $u_1$, $u_2$, &c. sont des "fonctions d'une même variable $x$, continues par rapport à cette varia-

**Demonstr. Quoniam, $x$ denotante valorem quemlibet ipsius variabilis talem qui limites illos $x_0$ et $X$ haud excedat,**

---

"ble dans le voisinage d'une valeur particulière, pour laquelle la sé-"rie est convergente, la somme S de la série est aussi, dans le voisi-"nage de cette valeur particulière, fonction continue de $x$" non nihil jure licet objici. Scilicet, ut fere Abel (loc. cit. p. 71) exempli caussà notavit, summa seriei

($\alpha$) . . . . . $\mathrm{Sin}\,x$, $\frac{1}{2}\mathrm{Sin}\,2x$, $\frac{1}{3}\mathrm{Sin}\,3x$, &c.

discontinua est functio ipsius $x$ in vicinitate valorum $x=\pm 2k\pi$ ($k$ num. integer aut $o$), quippe quæ summa ex. gr. dum $\pi \geqq x > o$ conficit $\frac{\pi - x}{2}$, attamen $o$ dum $x=o$, — quamquam jure optimo dici liceat "seriem esse convergentem pro $x$-valore particulari $o$, cujus in vicinitate continuæ sint functiones termini hujusce seriei." —

Quæ tamen aliæque ejusdem generis objectiones Theorema, verbis supra in contextu usurpatis consignatum, nullo modo stringunt: id quod ex ipsa patet demonstratione. — Sic ex. gr. series illa ($\alpha$) convergens equidem est, $x$ datâ qualibet inter $o$ et $2\pi$; at tamen, si ponatur $x$ indefinite in $o$ aut $2\pi$ convergere, seriem uno tenore convergentem permanere neutiquam statui licet. E contrario vi Theorematis hujus II pro certo statui licet ita non esse. —

De cætero locus ipse nos rei admonet in doctrina serierum infinitarum gravissimæ, cujus tamen debitam habere rationem nonnumquam supersederunt Geometræ, quamquam celari non potest de re ipsa jamdudum consensu quodam tacito inter eos convenisse. Scilicet si quando probata fuerit series, cujus termini functiones sint variabilis cujusdam $x$, convergens esse $x$ quâlibet datâ usque ad limitem quemdam $x=X$ (exclusive); neutiquam exinde consequitur pro certo statui licere convergentem uno tenore seriem permanere, etiamsi $x$ indefinite ad X adpropinquare fingatur. — Tale non licitum esse statutum seriebus, quæ pro $x=X$ divergentes sint, per se manifestum esse videtur. Quarum in numero, ut exemplum adferatur, est

($\beta$) . . . . . $\mathrm{Cos}\,x$, $\frac{1}{2}\mathrm{Cos}\,2x$, $\frac{1}{3}\mathrm{Cos}\,3x$, &c.

quæ convergens est $x$ datâ quâlibet inter $x=o$ et $2\pi$ (exclusive) at in ipsis his limitibus divergens. Seriem vero ($\varkappa$), quæ in ipsis etiam hisce limitibus convergens jure dici

series illa

$$f_1(x),\ f_2(x),\ f_3(x),\ \text{&c.}$$

convergens est; constat, $n$ quodam (ac quolibet majori), summam

$$f_{n+1}(x), + f_{n+2}(x) + f_{n+3}(x) + \text{&c.}$$

numerice esse $<$ dato quovis numero $\frac{\omega}{2}$. Numerus ille $n$ alius est aliis $x$ in genere; at talis semper (aut plures) $x$ exsistit, cui respondeat maximus $n$. Sit ille $\xi$. —

Itaque et summa

$f_{n+1}(\xi) + f_{n+2}(\xi) + \text{&c.}$, breviter $R_n$, numerice est $< \frac{\omega}{2}$

et, $\zeta$ atque $\zeta'$ denotantibus alios quoscumque variabilis valores limitibus $x_0$ et $X$ haud excedentes, summæ ambæ

$$\left.\begin{array}{l} f_{n+1}(\zeta) + f_{n+2}(\zeta) + \text{&c.} \\ f_{n+1}(\zeta') + f_{n+2}(\zeta') + \text{&c.} \end{array}\right\} \text{ numerice sunt } < \frac{\omega}{2},$$

ideoque etiam differentia harum summarum quarumlibet binarum certe $< \omega$ erit. —

---

possit, convergentem non permanere $x$-valoribus indefinite ad hos limites adpropinquantibus, non tam plane per se patet. Tali in re ambiguâ decernendâ nonnumquam Theorema nostrum II usui esse perspicitur. — Rem præterea istam, ut modo monuimus, jamdudum cognitam nec tamen semper probe servatam, sufficit hoc semel verbis expressis commemoratam fecisse.

Quæ cum ita sint, omni absque explicatione perspicitur, quid nobis valeat in sequentibus phrasis illa "convergentem esse seriem $x$ quâlibet positivâ" aut "$x$ qualibet negativa" aut "$x$ qualibet tali: $x_0 \leqq x < X$", et cet.

Quibus concessis jam rem ipsam adgrediamur. — Denotantibus $z$ et $z+\alpha$ valores quoslibet ipsius variabilis limitibus $x_0$ et $X$ haud excedentes, nos quidem in hoc Theoremate contendimus, $\alpha$ quadam et qualibet minori numerice, differentiam $\overset{(z+\alpha)}{S} - \overset{(z)}{S}$ numerice esse $<$ dato quovis numero $2\omega$, denotante $\overset{(z)}{S}$ summam serici de qua heic quæritur. —

Quoniam series ambæ

$$f_1(z),\ f_2(z),\ f_3(z),\ \&c.$$
$$f_1(z+\alpha),\ f_2(z+\alpha),\ f_3(z+\alpha),\ \&c.$$

convergentes sunt, constat seriem quoque

$$f_1(z+\alpha)-f_1(z),\ f_2(z+\alpha)-f_2(z),\ f_3(z+\alpha)-f_3(z),\ \&c.$$

esse convergentem atque haberi

$$\overset{(z+\alpha)}{S} - \overset{(z)}{S} = [f_1(z+\alpha)-f_1(z)]+[f_2(z+\alpha)-f_2(z)]+\ldots..+[f_n(z+\alpha)-f_n(z)]+r_n,$$

$r_n$ brev. denot. $\left[f_{n+1}(z+\alpha)-f_{n+1}(z)\right]+\left[f_{n+2}(z+\alpha)-f_{n+2}(z)\right]+$ &c.

Jam $n$ denotet numerum integrum tam magnum, ut hocce $n$ (et quolibet majori) quantitas illa $R_n$ numerice $< \frac{\omega}{2}$ sit. Numesus iste $n$ igitur functio erit solarum $\omega$ et $\xi$. Ex supra concessis patet hocce $n$ etiam ipsam $r_n$ numerice esse $< \omega$. — Quisquis jam ipsi $\alpha$ tribuatur valor (talis quem supra diximus), terminorum

$$f_1(z+\alpha)-f_1(z),\ f_2(z+\alpha)-f_2(z),\ldots..f_n(z+\alpha)-f_n(z),$$

unus (pluresve) numerice maximus erit. Sit ille $f_m(z+\alpha)-f_m(z)$: $m$ igitur numerum denotat integrum, functionem ipsius $\alpha$ quidem, at certe haud $> n$ ipso. Itaque certe habebitur

$S^{(z+\alpha)}-S^{(z)}-r_n$ numerice haud $>$ valore numer. ipsius $n[f_m(z+\alpha)-f_m(z)]$.

Et quoniam $f_m(x)$ continua erat functio inter $x_0$ et $X$, tam exiguum ipsi $\alpha$ tribui licet valorem numericum, ut posteriori huic membro contingat valor numer. $< \omega$. — Cætera patent. —

3. Quo jam propius ad finem propositum accedamus, solvatur

Problema. Invenire summam seriei (secund. art. 1) convergentis

$$(8)\ldots\ldots 1, [a(\mathrm{Cos}\, b+\sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}\, b)]_1 u(\mathrm{Cos}\, w+\sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}\, w),$$
$$[a(\mathrm{Cos}\, b+\sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}\, b)]_2 u^2(\mathrm{Cos}\, 2w+\sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}\, 2w),\ \text{&c.}$$

$a, b, w$ realibus quibuscumque atque $u$ numerice $<1$.—

Quoniam (in art. 1) probata est hæc series esse convergens, ita ut series ambæ terminorum realium, quarum altera ex partibus terminorum hujus seriei realibus et altera ex coëfficientibus ipsius $\sqrt{-1}$ conficitur, convergentes sint $a$ reali quâlibet; ex Theor. præcedenti II patet, "a priori" jam statui licere summam, de qua quæritur, necessario esse functionem ipsius $a$ formæ

(9) . . . . . $\varphi(a)+\sqrt{-1}\chi(a)$, breviter $\varpi(a)$,

[$\varphi$ et $\chi$ signis functionum formæ realis], continuam $a$ reali quàlibet, si modo probatæ fuerint tali esse naturâ partes ambæ termini generalis

(10) . . . . $[a(\mathrm{Cos}\,b+\sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}\,b)]_n u^n(\mathrm{Cos}\,nw+\sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}\,nw)$

vel potius hujus solius

$$[a(\mathrm{Cos}\,b+\sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}\,b)]_n\ ,$$

id quod reverâ omnibus absque ambagibus ex eo solo plane perspicitur, quod integra hæc est functio ipsius $a$. —

De cætero quoniam, dum $x=u(\mathrm{Cos}\,w+\sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}\,w)$ atque $u$ numerice $<1$ est, semper habetur ($y$ et $y'$ reales sint aut imaginariæ) *)

(11) . . . . . $(1+y_1x+y_2x^2+\&c.)(1+y'_1x+y'_2x^2+\&c.)=1+(y+y')_1x+(y+y')_2x^2+\&c.$;

patet, positis $y=a(\mathrm{Cos}\,b+\sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}\,b)$ et $y'=a'(\mathrm{Cos}\,b+\sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}\,b)$, haberi [$a$ et $a'$ realibus quibuscumque] etiam heic, in determinandam formam functionis $\varpi$, æquationem illam

$$\varpi(a).\varpi(a')=\varpi(a+a')\ ,$$

---

*) Etenim seriem, quæ ex modulis terminorum seriei (8) conficitur, istam

$$1,\ \frac{U}{1}\sqrt{a^2},\ \frac{U^2}{1.2}\sqrt{a^2(a^2-2a\,\mathrm{Cos}\,b+1^2)},\ \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\frac{U^n}{1\,2\ldots n}\sqrt{a^2(a^2-2a\,\mathrm{Cos}\,b+1^2)\ldots\ldots(a^2-2(n-1)a\,\mathrm{Cos}\,b+\overline{n-1}^2)},\ \&c.$$

($U$ denot. valorem ipsius $u$ numer.) convergentem esse, dum $U<1$ est, facile patet.

idcoque *)

$$(12) \ldots\ldots\ldots \varpi(a) = R^a.(\mathrm{Cos}\,Ta + \sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}\,Ta),$$

scil. $R$ positiva quant. } ambæ ab $a$ mi-
$T$ realis - - - - } nime pendentes.

Itaque pro certo statui licet, summam

$$1 + [a(\mathrm{Cos}\,b + \sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}\,b)]_1 u(\mathrm{Cos}\,w + \sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}\,w) +$$
$$+ [a(\mathrm{Cos}\,b + \sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}\,b)]_2 u^2(\mathrm{Cos}\,2w + \sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}\,2w) + \&c.$$

esse formâ illâ

$$R^a(\mathrm{Cos}\,Ta + \sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}\,Ta) \text{ seu } e^{a(\log R + T\sqrt{-1})}. \quad —$$

Ambabus unitate deminutis atque per $a(\mathrm{Cos}\,b + \sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}\,b)$ divisis comparatur, in quantitates illas $R$ et $T$ determinandas, æquatio

$$\frac{u}{1}(\mathrm{Cos}\,w + \sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}\,w) + [a(\mathrm{Cos}\,b + \sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}\,b)]_1 \frac{u^2}{2}(\mathrm{Cos}\,2w + \sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}\,2w) +$$
$$+ [a(\mathrm{Cos}\,b + \sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}\,b)]_2 \frac{u^3}{3}(\mathrm{Cos}\,3w + \sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}\,3w) + \&c. =$$
$$= \frac{e^{a(\log R + T\sqrt{-1})} - 1}{a}(\mathrm{Cos}\,b - \sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}\,b),$$

cujus in membris ambobus si ponatur $a$ indefinite in $o$ convergere, tandem in limite habebitur

$$\frac{u}{1}(\mathrm{Cos}\,w + \sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}\,w) - \frac{u^2}{2}(\mathrm{Cos}\,2w + \sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}\,2w) + \frac{u^3}{3}(\mathrm{Cos}\,3w + \sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}\,3w) - \&c. =$$
$$= (\log R + T\sqrt{-1})(\mathrm{Cos}\,b - \sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}\,b),$$

---

*) Vid ex. gr. Cauchy, Anal. Algébr. pag. 268. —

i. e. *)

$$\log\sqrt{1+2u\mathrm{Cos}w+u^2}+\sqrt{-1}\,\mathrm{ArcTg}\frac{u\,\mathrm{Sin}\,w}{1+u\mathrm{Cos}w}=$$

$$=\mathrm{Cos}\,b.\log R+T\,\mathrm{Sin}\,b+\sqrt{-1}\,(T\,\mathrm{Cos}\,b-\mathrm{Sin}\,b.\log R)\,,$$

seu

$$(13)\ldots\ldots\begin{cases}\log R=\mathrm{Cos}\,b.\log\sqrt{1+2u\mathrm{Cos}w+u^2}-s.\mathrm{Sin}\,b\,,\\ T=\mathrm{Sin}\,b.\log\sqrt{1+2u\mathrm{Cos}w+u^2}+s.\mathrm{Cos}\,b\,,\end{cases}$$

scilicet

(14) . . . . . $s$ brev. denot. $\mathrm{ArcTg}\dfrac{u\,\mathrm{Sin}\,w}{1+u\,\mathrm{Cos}\,w}$. —

Quæ si jam omnia in unum colligantur, comparatur æquatio: Dum $u$ numerice $<1$ est,

$$(\mathrm{I}')\ldots\ldots 1+[a(\mathrm{Cos}\,b+\sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}\,b)]_1\,u(\mathrm{Cos}\,w+\sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}\,w)+$$

$$+[a_{\backslash}(\mathrm{Cos}\,b+\sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}\,b)]_2\,u^2(\mathrm{Cos}\,2w+\sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}\,2w)+\ \&c.=$$

$$=e^{a\,(\mathrm{Cos}b.\log\sqrt{1+2u\mathrm{Cos}w+u^2}-s.\mathrm{Sin}b)}.\Big\{\mathrm{Cos}a(\mathrm{Sin}b.\log\sqrt{1+2u\mathrm{Cos}w+u^2}+s.\mathrm{Cos}b)+$$

$$+\sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}\ (\text{ejusd. quant.})\Big\}\,,$$

$$=[1+u(\mathrm{Cos}w+\sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}w)]^{a\,(\mathrm{Cos}\,b\,+\sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}\,b)}.\ -$$

*Q. E. F.* —

---

*) Vid. Cauchy, Anal. Algébr. pag. 306.

**) Conf. Cauchy, Leç. du Cale. Différ. Leç. XI. — Liceat hoc loco monere, nos — incuriâ quâdam Ill:i Cauchy in doctrinâ quantitatum imaginariarum stabilicndâ adductos — nuper admodum Reg. Scient. Academiæ Stockholm. de hac re Dissertationem obtulisse, in qua non modo probavimus, injuste Ill. Cauchy ex Analysi

Quo facto constat, æquationem illam (I) veram esse non modo realibus $y$ et $x$ (numerice $<1$), sed $y$ et $x$ quibuscumque formæ (1), $a$ et $b$ et $v$ realibus quibuscumque atque $u$ reali, numerice $<1$, — seu (positis $\mu$ et $\nu$ loco ipsarum $a\mathrm{Cos}b$ et $a\mathrm{Sin}b$) æquationem

$$(\mathrm{I}'')\ldots 1+(\mu+\nu\sqrt{-1})_1 u(\mathrm{Cos}w+\sqrt{-1}\mathrm{Sin}w)+(\mu+\nu\sqrt{-1})_2 u^2(\mathrm{Cos}2w+\sqrt{-1}\mathrm{Sin}2w)+\&c. =$$

$$= e^{-\nu.\mathrm{ArcTg}\frac{u\,\mathrm{Sin}\,w}{1+u\mathrm{Cos}w}}(1+2u\mathrm{Cos}w+u^2)^{\frac{\mu}{2}}.\left\{\mathrm{Cos}\left[\mu\mathrm{ArcTg}\frac{u\,\mathrm{Sin}\,w}{1+u\,\mathrm{Cos}\,w}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\log(1+2u\,\mathrm{Cos}\,w+u^2)^{\frac{\nu}{2}}\right]+\sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}\ [\text{ejusd. quant.}]\right\},$$

$$= [1+u(\mathrm{Cos}\,w+\sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}\,w)]^{\mu+\nu\sqrt{-1}}$$

---

sustulisse signa illa

$$\left.\begin{array}{l}(-A+\beta\sqrt{-1})^{\mu}\ \text{atque in speeie}\ (-A)^{\mu},\\ \log(-A+\beta\sqrt{-1})\ \text{atque in speeie}\ \log(-A),\end{array}\right\}\ A\ \text{denot. numerum},$$

$$\mathrm{ArcSin}\alpha\ \text{et}\ \mathrm{ArcCos}\alpha,\ \text{dum}\ \alpha\ \text{realis est ac numerice}\ >1,$$

sed etiam — ut heic cætera omittamus — ostendimus nihil omnino impedire, quominus æquatio illa permaximi momenti

$$A^{\mu}=e^{\mu\log A}$$

legitima statuatur, etiamsi loco numeri A quantitatisque realis $\mu$ substituantur

$$\alpha+\beta\sqrt{-1}\ \text{et}\ \mu+\nu\sqrt{-1},\ (\alpha,\ \beta,\ \mu,\ \nu\ \text{realibus quibuscumque}).\ —$$

Quo facto plane apparet, legitimam esse transgressionem istam a secundo in tertium æquationis (I′) membrum: id quod de cætero heic vel ex iis, quæ jam a Cauchy ipso et quidem loco cit. statuta erant, consequitur, quippe quod heic $u$ numerice $<1$ posita est. —

veram esse, dum $u$ numerice $<1$ est, $w$ et $\mu$ et $\nu$ realibus quibuscumque. —

## §. 2.

**1.** Quo jam breviter emolumenta, quæ Analysi et quidem nominatim doctrinæ serierum realium infinitarum ex æquatione illa (I) seu (I″) generali contingant, indicentur; omnium primo recordari juvabit esse ($m$ denot. num. integrum)

$$\frac{\mu+\nu\sqrt{-1}-m+1}{m} =$$

$$= \pm\frac{1}{m}\sqrt{(\mu-m+1)^2+\nu^2}\cdot\left(\mathrm{CosArcTg}\frac{\nu}{\mu-m+1}+\sqrt{-1}\,\mathrm{SinArcTg}\frac{\nu}{\mu-m+1}\right),$$

prout $\mu-m+1$ positiva est aut negat. quant· ideoque in casu utroque

$$(15)\ldots = \frac{\mu-m+1}{m}\sqrt{1+\left(\frac{\nu}{\mu-m+1}\right)^2}\cdot\left(\mathrm{CosArcTg}\frac{\nu}{\mu-m+1}+\sqrt{-1}\,\mathrm{SinArcTg}\frac{\nu}{\mu-m+1}\right);$$

quam ob caussam, certe nisi $\mu-m+1=o$ sit, habetur $(n>\text{aut}=m)$

$$(16)\ldots\ldots(\mu+\nu\sqrt{-1})_n u^n(\mathrm{Cos}\,n w+\sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}\,n w) =$$

$$= \mu_n\sqrt{\left[1+\left(\frac{\nu}{\mu}\right)^2\right]\left[1+\left(\frac{\nu}{\mu-1}\right)^2\right]\ldots\left[1+\frac{\nu}{\mu-n+1}\right]}\cdot\left\{\mathrm{Cos}\left(nw+\mathrm{ArcTg}\frac{\nu}{\mu}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\,\mathrm{ArcTg}\frac{\nu}{\mu-1}+\ldots\ldots+\mathrm{ArcTg}\frac{\nu}{\mu-n+1}\right)+\sqrt{-1}\,\mathrm{Sin(ejusd.)}\right\}.\text{ --}$$

Cujus ope æquatio illa (I″) in duas has admodum generales abit:

$$(\mathrm{II})\ldots\begin{cases} e^{-v.\mathrm{ArcTg}\frac{u\mathrm{Sin}w}{1+u\mathrm{Cos}w}}(1+2u\mathrm{Cos}w+u^2)^{\frac{\mu}{2}}\mathrm{Cos}\left[u\mathrm{ArcTg}\frac{u\mathrm{Sin}w}{1+u\mathrm{Cos}w}+\log(1+2u\mathrm{Cos}w+u^2)^{\frac{v}{2}}\right]= \\ =1+\sum_{n=1}^{n=\infty}\mu_n u^n\sqrt{\left[1+\left(\frac{v}{\mu}\right)^2\right]\left[1+\left(\frac{v}{\mu-1}\right)^2\right]\ldots\left[1+\left(\frac{v}{\mu-n+1}\right)^2\right]}.\mathrm{Cos}\left(nw+\mathrm{ArcTg}\frac{v}{\mu}+\mathrm{ArcTg}\frac{v}{\mu-1}+\ldots\right. \\ \left.\ldots+\mathrm{ArcTg}\frac{v}{\mu-n+1}\right), \\ e^{-v.\mathrm{ArcTg}\frac{u\mathrm{Sin}w}{1+u\mathrm{Cos}w}}(1+2u\mathrm{Cos}w+u^2)^{\frac{\mu}{2}}\mathrm{Sin}\left[u\mathrm{ArcTg}\frac{u\mathrm{Sin}w}{1+u\mathrm{Cos}w}+\log(1+2u\mathrm{Cos}w+u^2)^{\frac{v}{2}}\right]= \\ =\sum_{n=1}^{n=\infty}\mu_n u^n\sqrt{\left[1+\left(\frac{v}{\mu}\right)^2\right]\left[1+\left(\frac{v}{\mu-1}\right)^2\right]\ldots\left[1+\left(\frac{v}{\mu-n+1}\right)^2\right]}.\mathrm{Sin}\left(nw+\mathrm{ArcTg}\frac{v}{\mu}+\mathrm{ArcTg}\frac{v}{\mu-1}+\ldots\right. \\ \left.\ldots+\mathrm{ArcTg}\frac{v}{\mu-n+1}\right), \end{cases}$$

quæ quidem ambæ valent, dum $u$ numerice $<1$ est, $w$ reali qualibet nec non $\mu$ et $v$, certe nisi $\mu$ numerus integer aut $=o$ fuerit. —

Reverâ in hoc quoque casu ($\mu=m-1$, numero integro aut $o$) valent, eâ quidem conditione duplici ut 1:o) producto

$$(17)\ldots\ldots\ldots\frac{\mu-m+1}{m}\sqrt{1+\left(\frac{v}{\mu-m+1}\right)^2},$$

ubi occurrat, intelligatur [id quod reverâ admonet ipsa forma hujusce expressionis]

$$(18)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\frac{1}{m}\sqrt{v^2},$$

atque 2:o) signo $\mathrm{ArcTg}\frac{v}{\mu-m+1}$ intelligatur $\pm\frac{\pi}{2}$, prout $v$ positiva

est aut negat. quantitas *). — Et quidem si forte foret $\nu = o$ una cum **) $\mu =$ num. int. aut $o$ $(= m-1)$, quo etiam tunc valeant æquationes, sufficit ut sola lex 1:o) observetur: id quod (ut in casu priori) per se patet vi æquationis (15) atque præterea ex eo quod tunc æquationes ipsæ (II) in finitas has easdemque cognitas abeunt

$$(19)\ldots\ldots\begin{cases}(1+2u\mathrm{Cos}w+u^2)^{\frac{m}{2}}\mathrm{Cos}\left(m\mathrm{ArcTg}\dfrac{u\mathrm{Sin}w}{1+u\mathrm{Cos}w}\right)= \\ \qquad = 1+m_1u\mathrm{Cos}w+m_2u^2\mathrm{Cos}2w+\ldots+m_mu^m\mathrm{Cos}mw, \\ (1+2u\mathrm{Cos}w+u^2)^{\frac{m}{2}}\mathrm{Sin}\left(m\mathrm{ArcTg}\dfrac{u\mathrm{Sin}w}{1+u\mathrm{Cos}w}\right)= \\ \qquad = m_1u\mathrm{Sin}w+m_2u^2\mathrm{Sin}2w+\ldots+m_mu^m\mathrm{Sin}mw,\end{cases}$$

(scilicet mutato $m-1$ in $m$, simplicitatis ergo). —

Verbo: Æquationes (II) veræ sunt, dum $u$ numerice $<1$ est, $w$ reali qualibet nec non $\mu$ et $\nu$ (salvâ conditione jam commemoratâ, si forte fuerit $\mu$ num. int. aut $o$). —

---

*) Scilicet in hoc casu ($\mu = m-1$) æquatio illa (15), ut plane apparet, salvis his conditionibus identica evadit. Res præterea ex doctrina quant. imaginariarum perbene nota est. —

**) Si fuerit $\nu = o$, dum $\mu$ numerum integrum aut $o$ non conficit, nullum est dubium quin veræ sint æquat. (II): id quod vel ex ipsis verbis æquationes hasce subsequentibus constat.

2. Speciales jam considerentur positiones notatu dignæ. —

1:o)

Posito $v=o$,

æquationes (II) abeunt in cognitas ambas

$$(\text{II.A}).....\begin{cases}(1+2u\text{Cos}w+u^2)^{\frac{\mu}{2}}.\text{Cos}(\mu.\text{ArcTg}\dfrac{u\,\text{Sin}\,w}{1+u\,\text{Cos}w})=1+\overset{n=\infty}{\underset{n=1}{S}}\mu_n u^n\,\text{Cos}\,nw\,,\\ (1+2u\text{Cos}w+u^2)^{\frac{\mu}{2}}.\text{Sin}(\mu.\text{ArcTg}\dfrac{u\,\text{Sin}w}{1+u\text{Cos}w})=\overset{n=\infty}{\underset{n=1}{S}}\mu_n u^n\,\text{Sin}\,n\,w\,.\end{cases}$$

Posito heic $w=o$ seu potius in genere $\text{Cos}\,w=1$, solita comparatur

$$(\text{II.A.a})\ .\ .\ .\ .\ .\ (1+u)^{\mu}=1+\mu_1 u+\mu_2 u^2+\mu_3 u^3+\ \&c.$$

Posito autem $w=\dfrac{\pi}{2}$ seu in genere $\text{Sin}w=1$, habentur

$$(\text{II.A.b})\ ...\begin{cases}(1+u^2)^{\frac{\mu}{2}}\ .\ \text{Cos}(\mu\text{ArcTg}u)=1-\mu_2 u^2+\mu_4 u^4-\mu_6 u^6+\ \&c.\\ (1+u^2)^{\frac{\mu}{2}}\ .\ \text{Sin}(\mu\text{ArcTg}u)=\mu_1 u-\mu_3 u^3+\mu_5 u^5-\ \ \&c.\end{cases}$$

seu [pos. $z=\text{ArcTg}\,u$, unde $\sqrt{1+u^2}=\text{Sec}z$] cognitæ illæ "explicationes" — secundum dignitates ipsius $\text{Tg}\,z$ — functionum

$$(\text{II.A.b}')\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ \frac{\text{Cos}\,\mu z}{\text{Cos}^{\mu}z}\ \text{ et }\ \frac{\text{Sin}\,\mu z}{\text{Cos}^{\mu}z}\,,$$

$$\left(z\ \text{numerice}\ <\ \frac{\pi}{4}\right).\ —$$

2:o)

Posito $\mu = o$ ,

æquationes (II), debitâ ratione conditionis illius duplicis post (II) expositæ habitâ, novas hasce dant æquationes

$$(\mathrm{II.B})\ldots\begin{cases} c^{-v.\mathrm{ArcTg}\frac{u\,\mathrm{Sin}\,w}{1+u\mathrm{Cos}w}}.\mathrm{Cos}\log\left(1+2u\mathrm{Cos}w+u^2\right)^{\frac{v}{2}} = \\ \\ =1-v.\left\{u\mathrm{Sin}w-\sum_{n=1}^{n=\infty}(-1)^{n+1}\,\frac{\sqrt{\left(1+\frac{v^2}{1^2}\right)\left(1+\frac{v^2}{2^2}\right)\ldots\left(1+\frac{v^2}{n^2}\right)}}{n+1}\,u^{n+1}\mathrm{Sin}\left((n+1)w-\mathrm{ArcTg}\frac{v}{1}-\mathrm{ArcTg}\right.\right. \\ \\ \left.\left.\ldots\ldots-\mathrm{ArcTg}\frac{v}{n}\right.\right. \\ \\ c^{-v.\mathrm{ArcTg}\frac{u\,\mathrm{Sin}\,w}{1+u\mathrm{Cos}\,w}}.\mathrm{Sin}\log\left(1+2u\mathrm{Cos}w+u^2\right)^{\frac{v}{2}}= \\ \\ =v.\left\{u\mathrm{Cos}w-\sum_{n=1}^{n=\infty}(-1)^{n+1}\,\frac{\sqrt{\left(1+\frac{v^2}{1^2}\right)\left(1+\frac{v^2}{2^2}\right)\ldots\left(1+\frac{v^2}{n^2}\right)}}{n+1}\,u^{n+1}\mathrm{Cos}\left((n+1)w-\mathrm{ArcTg}\frac{v}{1}-\mathrm{ArcTg}\frac{v}{2}\right.\right. \\ \\ \left.\left.\ldots\ldots-\mathrm{ArcTg}\frac{v}{n}\right)\right. \end{cases}$$

quæ igitur ambæ valent, dum $u$ numerice $<1$ est, $w$ et $v$ realibus quibuscumque. —

Posito in his $\mathrm{Cos}\,w=1$, comparantur

$$\left\{\begin{array}{l}\mathrm{Cos}\log(1+u)^{v}= \\ \\ =1-v.\overset{n=\infty}{\underset{n=1}{S}}(-1)^{n+1}\dfrac{\sqrt{\left(1+\frac{v^2}{1^2}\right)\left(1+\frac{v^2}{2^2}\right)\ldots\left(1+\frac{v^2}{n^2}\right)}}{n+1}u^{n+1}\mathrm{Sin}\left(\mathrm{A.Tg}\frac{v}{1}+\mathrm{A.Tg}\frac{v}{2}+\ldots+\mathrm{A.Tg}\frac{v}{n}\right), \\ \\ \mathrm{Sin}\log(1+u)^{v}= \\ \\ =v.\left\{u-\overset{n=\infty}{\underset{n=1}{S}}(-1)^{n+1}\dfrac{\sqrt{\left(1+\frac{v^2}{1^2}\right)\left(1+\frac{v^2}{2^2}\right)\ldots\left(1+\frac{v^2}{n^2}\right)}}{n+1}u^{n+1}\mathrm{Sin}\left(\mathrm{A.Tg}\frac{v}{1}+\mathrm{A.Tg}\frac{v}{2}+\ldots+\mathrm{A.Tg}\frac{v}{n}\right)\right\},\end{array}\right.$$

$u$ numerice $<1$, $v$ reali qualibet. —

Posito autem $\mathrm{Sin}\,w=1$, habentur

$$e^{-v.\mathrm{ArcTg}u}.\mathrm{Cos}\log(1+u^2)^{\frac{v}{2}}=$$

$$=1-v.\left\{u+\overset{n=\infty}{\underset{n=1}{S}}\frac{\sqrt{\left(1+\frac{v^2}{1^2}\right)\left(1+\frac{v^2}{2^2}\right)\ldots\left(1+\frac{v^2}{n^2}\right)}}{n+1}u^{n+1}\mathrm{Sin}\left((n+1)\frac{\pi}{2}+\mathrm{A.Tg}\frac{v}{1}+\mathrm{A.Tg}\frac{v}{2}+\ldots+\mathrm{A.Tg}\frac{v}{n}\right)\right\},$$

$$=1-v.\left\{\begin{array}{l}u-\overset{n=\infty}{\underset{n=1}{S}}(-1)^{n+1}\dfrac{\sqrt{\left(1+\frac{v^2}{1^2}\right)\left(1+\frac{v^2}{2^2}\right)\ldots\left(1+\frac{v^2}{(2n-1)^2}\right)}}{2n}u^{2n}\mathrm{Sin}\left(\mathrm{A.Tg}\frac{v}{1}+\mathrm{A.Tg}\frac{v}{2}+\ldots+\mathrm{A.Tg}\frac{v}{2n-1}\right)- \\ \\ -\overset{n=\infty}{\underset{n=1}{S}}(-1)^{n+1}\dfrac{\sqrt{\left(1+\frac{v^2}{1^2}\right)\left(1+\frac{v^2}{2^2}\right)\ldots\left(1+\frac{v^2}{(2n)^2}\right)}}{2n+1}u^{2n+1}\mathrm{Cos}\left(\mathrm{A.Tg}\frac{v}{1}+\mathrm{A.Tg}\frac{v}{2}+\ldots+\mathrm{A.Tg}\frac{v}{2n}\right)\end{array}\right\};$$

et

$$(\text{II.B.b}) \ldots\ldots e^{-v.\text{ArcTg}u}.\,\text{Sin}\log(1+u^2)^{\frac{v}{2}} =$$

$$= -v.\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\sqrt{\left(1+\frac{v^2}{1^2}\right)\left(1+\frac{v^2}{2^2}\right)\ldots\left(1+\frac{v^2}{n^2}\right)}}{n+1} u^{n+1} \text{Cos}\left((n+1)\frac{\pi}{2}+\text{A.Tg}\frac{v}{1}+\text{A.Tg}\frac{v}{2}+\ldots..+\text{A.Tg}\right.$$

$$(20) \ldots. = v.\left\{ \begin{array}{l} \sum_{n=1}^{n=\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sqrt{\left(1+\frac{v^2}{1^2}\right)\left(1+\frac{v^2}{2^2}\right)\ldots\left(1+\frac{v^2}{(2n-1)^2}\right)}}{2n} u^{2n} \text{Cos}(\text{A.Tg}\frac{v}{1}+\text{A.Tg}\frac{v}{2}+\ldots.+\text{A.Tg}\frac{v}{2n-} \\ -\sum_{n=1}^{n=\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sqrt{\left(1+\frac{v^2}{1^2}\right)\left(1+\frac{v^2}{2^2}\right)\ldots\left(1+\frac{v^2}{(2n)^2}\right)}}{2n+1} u^{2n+1} \text{Sin}(\text{A.Tg}\frac{v}{1}+\text{A.Tg}\frac{v}{2}+\ldots.+\text{A.Tg}\frac{v}{2} \end{array} \right.$$

$u$ numerice $<1$, $v$ reali qualibet. —

Et quidem pos. heic $z=\text{A.Tg}u$ habentur, dum $z$ numerice $<\frac{\pi}{4}$ est,

$$(\text{II.B.b}') \ldots\ldots e^{-vz}.\text{Cos}(\log\text{Cos}^{v} z) =$$

$$= 1-v.\left\{ \text{Tg}z + \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\sqrt{\left(1+\frac{v^2}{1^2}\right)\left(1+\frac{v^2}{2^2}\right)\ldots\left(1+\frac{v^2}{n^2}\right)}}{n+1} (\text{Tg}z)^{n+1}.\,\text{Sin}\left((n+1)\frac{\pi}{2}+\text{A.Tg}\frac{v}{1}+\text{A.Tg}\frac{v}{2}+\ldots+\text{A.Tg}\frac{v}{n}\right)\right.$$

$$(20') \ldots. = 1-v.\left\{ \begin{array}{l} \text{Tg}z - \sum_{n=1}^{n=\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sqrt{\left(1+\frac{v^2}{1^2}\right)\left(1+\frac{v^2}{2^2}\right)\ldots\left(1+\frac{v^2}{(2n-1)^2}\right)}}{2n} (\text{Tg}z)^{2n} \text{Sin}(\text{A.Tg}\frac{v}{1}+\text{A.Tg}\frac{v}{2}+\ldots+\text{A.Tg}\frac{v}{2n}) \\ -\sum_{n=1}^{n=\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sqrt{\left(1+\frac{v^2}{1^2}\right)\left(1+\frac{v^2}{2^2}\right)\ldots\left(1+\frac{v^2}{(2n)^2}\right)}}{2n+1} (\text{Tg}z)^{2n+1} \text{Cos}(\text{A.Tg}\frac{v}{1}+\text{A.Tg}\frac{v}{2}+\ldots+\text{A.T}\frac{v}{2n} \end{array} \right.$$

et

$$\text{Ib}')\ldots\ldots e^{-\nu z}.\operatorname{Sin}(\log\operatorname{Cos}^{\nu} z)=$$

$$=\sum_{n=1}^{n=\infty} \nu.\frac{\sqrt{\left(1+\frac{\nu^2}{1^2}\right)\left(1+\frac{\nu^2}{2^2}\right)\ldots\left(1+\frac{\nu^2}{n^2}\right)}}{n+1}(\operatorname{Tg}z)^{n+1}.\operatorname{Cos}\left((n+1)\frac{\pi}{2}+\text{A.Tg}\frac{\nu}{1}+\text{A.Tg}\frac{\nu}{2}+\ldots+\text{A.Tg}\frac{\nu}{n}\right),$$

$$\text{)}.=-\nu.\left\{\begin{array}{l}\sum_{n=1}^{n=\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sqrt{\left(1+\frac{\nu^2}{1^2}\right)\left(1+\frac{\nu^2}{2^2}\right)\ldots\left(1+\frac{\nu^2}{(2n-1)^2}\right)}}{2n}(\operatorname{Tg}z)^{2n}\operatorname{Cos}\left(\text{A.Tg}\frac{\nu}{1}+\text{A.Tg}\frac{\nu}{2}+\ldots+\text{A.Tg}\frac{\nu}{2n-1}\right)-\\ -\sum_{n=1}^{n=\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sqrt{\left(1+\frac{\nu^2}{1^2}\right)\left(1+\frac{\nu^2}{2^2}\right)\ldots\left(1+\frac{\nu^2}{(2n)^2}\right)}}{2n+1}(\operatorname{Tg}z)^{2n+1}\operatorname{Sin}\left(\text{A.Tg}\frac{\nu}{1}+\text{A.Tg}\frac{\nu}{2}+\ldots+\text{A.Tg}\frac{\nu}{2n}\right)\end{array}\right\}.-$$

3. In art. præcedenti eas jam consideravimus functionis

$$(21)\ldots\ldots\ldots[1+u(\operatorname{Cos}w+\sqrt{-1}\operatorname{Sin}w)]^{a(\operatorname{Cos}b+\sqrt{-1}\operatorname{Sin}b)},$$

secundum dignitates ipsius $u$ (numerice $<1$) explicatæ, species quæ ex tributis arcui $b$ valoribus solitis specialibus — arcu illo $w$ indeterminato relicto — proveniunt, ambas inquam

$$(21.\text{A})\ldots[1+u(\operatorname{Cos}w+\sqrt{-1}\operatorname{Sin}w)]^{a}\ \text{et}\ [1+u(\operatorname{Cos}w+\sqrt{-1}\operatorname{Sin}w)]^{a\sqrt{-1}}\ldots.(21.\text{B})$$

atque insuper novas harum species, quæ posito heic successive $\operatorname{Cos}w=1$ et $\operatorname{Sin}w=1$ habentur, i. e.

$$\left.\begin{array}{l}(21.\text{A.a})\ldots\ldots(1+u)^{a},\\ (21.\text{A.b})\ldots\ldots(1+u\sqrt{-1})^{a},\end{array}\right\}\ \text{et}\ \left\{\begin{array}{l}(1+u)^{a\sqrt{-1}}\ldots\ldots\ldots(21.\text{B.a})\\ (1+u\sqrt{-1})^{a\sqrt{-1}}\ldots\ldots(21.\text{B.b.})\end{array}\right.$$

Reliquum est, ut jam paucis eæ quoque referantur functionis (21) species, quæ tributis arcui $w$ valoribus in hac re solitis specialibus — arcu illo $b$ indeterminato relicto — proveniunt, ambas inquam

$$(21.C)\ldots\ldots(1+u)^{a(\mathrm{Cos}b+\sqrt{-1}\mathrm{Sin}b)} \quad \text{et} \quad (1+u\sqrt{-1})^{a(\mathrm{Cos}b+\sqrt{-1}\mathrm{Sin}b)} \ldots\ldots (21.D)$$

in quas conveniunt positiones $\mathrm{Cos}w=1$ et $\mathrm{Sin}w=1$ in æquationibus ipsis (II). —

1:o)

Posito $\mathrm{Cos}w=1$,

æquationes (II) abeunt in

$$(II.C)\ldots\begin{cases}(1+u)^{\mu}.\mathrm{Cos}\log(1+u)^{\nu}= \\ =1+\sum_{n=1}^{n=\infty}\mu_n u^n\sqrt{\left[1+\left(\frac{\nu}{\mu}\right)^2\right]\left[1+\left(\frac{\nu}{\mu-1}\right)^2\right]\ldots\left[1+\left(\frac{\nu}{\mu-n+1}\right)^2\right]}.\mathrm{Cos}\left(\mathrm{A.Tg}\frac{\nu}{\mu}+\mathrm{A.Tg}\frac{\nu}{\mu-1}+\ldots+\mathrm{A.Tg}\frac{\nu}{\mu-n+1}\right) \\ (1+u)^{\mu}.\mathrm{Sin}\log(1+u)^{\nu}= \\ =\sum_{n=1}^{n=\infty}\mu_n u^n\sqrt{\left[1+\left(\frac{\nu}{\mu}\right)^2\right]\left[1+\left(\frac{\nu}{\mu-1}\right)^2\right]\ldots\left[1+\left(\frac{\nu}{\mu-n+1}\right)^2\right]}.\mathrm{Sin}\left(\mathrm{A.Tg}\frac{\nu}{\mu}+\mathrm{A.Tg}\frac{\nu}{\mu-1}+\ldots+\mathrm{A.Tg}\frac{\nu}{\mu-n+1}\right)\end{cases}$$

quæ quidem ambæ valent, dum $u$ numerice $<1$ est, $\mu$ et $\nu$ realibus quibuscumque (salvâ conditione supra commemoratâ, si forte fuerit $\mu$ numerus int. aut $o$). —

Per se patet, si in his ponerentur successive $\nu=o$ et $\mu=o$, recuperaturos nos fore æquationes illas (II.A.a) et (II.B.a). —

2:o)

Posito $\operatorname{Sin} w = 1$,

æquationes (II) abeunt in

$$\text{ID)} \quad \ldots\ldots e^{-\nu.\operatorname{ArcTg} u}(1+u^2)^{\frac{\mu}{2}}.\operatorname{Cos}\left[\mu \operatorname{ArcTg} u + \log(1+u^2)^{\frac{\nu}{2}}\right] =$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{n=\infty} S \mu_n u^n \sqrt{\left[1+\left(\frac{\nu}{\mu}\right)^2\right]\left[1+\left(\frac{\nu}{\mu-1}\right)^2\right]\ldots\left[1+\left(\frac{\nu}{\mu-n+1}\right)^2\right]}.\operatorname{Cos}\left(\frac{n\pi}{2}+\operatorname{A.Tg}\frac{\nu}{\mu}+\operatorname{A.Tg}\frac{\nu}{\mu-1}+\ldots.\right.$$

$$\left.\ldots.+\operatorname{A.Tg}\frac{\nu}{\mu-n+1}\right),$$

$$2\ldots = 1 - \sum_{n=1}^{n=\infty} S(-1)^{n+1}\mu_{2n-1}u^{2n-1}\sqrt{\left[1+\left(\frac{\nu}{\mu}\right)^2\right]\left[1+\left(\frac{\nu}{\mu-1}\right)^2\right]\ldots\left[1+\left(\frac{\nu}{\mu-2n+2}\right)^2\right]}.\operatorname{Sin}\left(\operatorname{A.Tg}\frac{\nu}{\mu}+\operatorname{A.Tg}\frac{\nu}{\mu-1}+\ldots.\right.$$

$$\left.\ldots.+\operatorname{A.Tg}\frac{\nu}{\mu-2n+2}\right) -$$

$$-\sum_{n=1}^{n=\infty} S(-1)^{n+1}\mu_{2n}u^{2n}\sqrt{\left[1+\left(\frac{\nu}{\mu}\right)^2\right]\left[1+\left(\frac{\nu}{\mu-1}\right)^2\right]\ldots\left[1+\left(\frac{\nu}{\mu-2n+1}\right)^2\right]}.\operatorname{Cos}\left(\operatorname{A.Tg}\frac{\nu}{\mu}+\operatorname{A.Tg}\frac{\nu}{\mu-1}+\ldots.\right.$$

$$\left.\ldots.+\operatorname{A.Tg}\frac{\nu}{\mu-2n+1}\right);$$

et

$$\text{)} \quad \ldots\ldots e^{-\nu.\operatorname{ArcTg} u}(1+u^2)^{\frac{\mu}{2}}.\operatorname{Sin}\left[\mu \operatorname{ArcTg} u + \log(1+u^2)^{\frac{\nu}{2}}\right] =$$

$$= \sum_{n=1}^{n=\infty} S \mu_n u^n \sqrt{\left[1+\left(\frac{\nu}{\mu}\right)^2\right]\left[1+\left(\frac{\nu}{\mu-1}\right)^2\right]\ldots\left[1+\left(\frac{\nu}{\mu-n+1}\right)^2\right]}.\operatorname{Sin}\left(\frac{n\pi}{2}+\operatorname{A.Tg}\frac{\nu}{\mu}+\operatorname{A.Tg}\frac{\nu}{\mu-1}+\ldots..\right.$$

$$\left.\ldots+\operatorname{A.Tg}\frac{\nu}{\mu-n+1}\right),$$

$$(22)\ldots = \sum_{n=1}^{n=\infty} (-1)^{n+1} \mu_{2n-1} u^{2n-1} \sqrt{\left[1+\left(\frac{\nu}{\mu}\right)^2\right]\left[1+\left(\frac{\nu}{\mu-1}\right)^2\right]\ldots\left[1+\left(\frac{\nu}{\mu-2n+2}\right)^2\right]}\,.\,\mathrm{Cos}\left(\mathrm{A.Tg}\frac{\nu}{\mu}+\mathrm{A.Tg}\frac{\nu}{\mu-1}+\right.$$

$$\left.\ldots\ldots+\mathrm{A.Tg}\frac{\nu}{\mu-2n+2}\right)$$

$$-\sum_{n=1}^{n=\infty} (-1)^{n+1} \mu_{2n} u^{2n} \sqrt{\left[1+\left(\frac{\nu}{\mu}\right)^2\right]\left[1+\left(\frac{\nu}{\mu-1}\right)^2\right]\ldots\left[1+\left(\frac{\nu}{\mu-2n+1}\right)^2\right]}\,.\,\mathrm{Sin}\left(\mathrm{A.Tg}\frac{\nu}{\mu}+\mathrm{A.Tg}\frac{\nu}{\mu-1}+\ldots\right.$$

$$\left.\ldots\ldots+\mathrm{A.Tg}\frac{\nu}{\mu-2n+1}\right),$$

quæ igitur ambæ valent, dum $u$ numerice $<1$ est, $\mu$ et $\nu$ realibus quibuscumque (salvâ conditione supra commemoratâ, si forte fuerit $\mu$ numerus int. aut $o$). —

Per se patet, si in his ponerentur successive $\nu = o$ et $\mu = o$, recuperaturos nos fore æquationes illas (II.A.b) et (II.B.b) una cum (20). —

Aliam his tandem æquat. (II.D) et (22) reddi licet formam notatu vere dignam, posito $z = \mathrm{ArcTg}\,u$ ideoque $\sqrt{1+u^2} = \frac{1}{\mathrm{Cos}z}$, nempe:

$$(\mathrm{II.D'})\ldots e^{-\nu z}.\frac{\mathrm{Cos}\left(\mu z - \log \mathrm{Cos}^{\nu} z\right)}{\mathrm{Cos}^{\mu} z} =$$

$$= \sum_{n=1}^{n=\infty} \mu_n (\mathrm{Tg}z)^n . \sqrt{\left[1+\left(\frac{\nu}{\mu}\right)^2\right]\left[1+\left(\frac{\nu}{\mu-1}\right)^2\right]\ldots\left[1+\left(\frac{\nu}{\mu-n+1}\right)^2\right]}.\mathrm{Cos}\left(\frac{n\pi}{2}+\mathrm{A.Tg}\frac{\nu}{\mu}+\mathrm{A.Tg}\frac{\nu}{\mu-1}+\ldots\ldots\right.$$

$$\left.\ldots\ldots+\mathrm{A.Tg}\frac{\nu}{\mu-n+}\right),$$

$$\ldots = 1 - \sum_{n=1}^{n=\infty} (-1)^{n+1} \mu_{2n-1} (\mathrm{Tg}\, z)^{2n-1} \sqrt{\left[1+\left(\frac{\nu}{\mu}\right)^2\right]\left[1+\left(\frac{\nu}{\mu-1}\right)^2\right]\ldots\left[1+\left(\frac{\nu}{\mu-2n+2}\right)^2\right]} \cdot \mathrm{Sin}\left(\mathrm{A.Tg}\frac{\nu}{\mu} + \mathrm{A.Tg}\frac{\nu}{\mu-1} + \ldots \ldots + \mathrm{A.Tg}\frac{\nu}{\mu-2n+2}\right) -$$

$$- \sum_{n=1}^{n=\infty} (-1)^{n+1} \mu_{2n} (\mathrm{Tg}\, z)^{2n} \sqrt{\left[1+\left(\frac{\nu}{\mu}\right)^2\right]\left[1+\left(\frac{\nu}{\mu-1}\right)^2\right]\ldots\left[1+\left(\frac{\nu}{\mu-2n+1}\right)^2\right]} \cdot \mathrm{Cos}\left(\mathrm{A.Tg}\frac{\nu}{\mu} + \mathrm{A.Tg}\frac{\nu}{\mu-1} + \ldots \ldots + \mathrm{A.Tg}\frac{\nu}{\mu-2n+1}\right);$$

et

$$\ldots e^{-\nu z} \cdot \frac{\mathrm{Sin}(\mu z - \log \mathrm{Cos}^{\nu} z)}{\mathrm{Cos}^{\mu} z} =$$

$$\ldots_n (\mathrm{Tg} z)^n \cdot \sqrt{\left[1+\left(\frac{\nu}{\mu}\right)^2\right]\left[1+\left(\frac{\nu}{\mu-1}\right)^2\right]\ldots\left[1+\left(\frac{\nu}{\mu-n+1}\right)^2\right]} \cdot \mathrm{Sin}\left(\frac{n\pi}{2} + \mathrm{A.Tg}\frac{\nu}{\mu} + \mathrm{A.Tg}\frac{\nu}{\mu-1} + \ldots \ldots + \mathrm{A.Tg}\frac{\nu}{\mu-n+1}\right),$$

$$\ldots = \sum_{n=1}^{n=\infty} (-1)^{n+1} \mu_{2n-1} (\mathrm{Tg} z)^{2n-1} \sqrt{\left[1+\left(\frac{\nu}{\mu}\right)^2\right]\left[1+\left(\frac{\nu}{\mu-1}\right)^2\right]\ldots\left[1+\left(\frac{\nu}{\mu-2n+2}\right)^2\right]} \cdot \mathrm{Cos}\left(\mathrm{A.Tg}\frac{\nu}{\mu} + \mathrm{A.Tg}\frac{\nu}{\mu-1} + \ldots \ldots + \mathrm{A.Tg}\frac{\nu}{\mu-2n+2}\right) -$$

$$- \sum_{n=1}^{n=\infty} (-1)^{n+1} \mu_{2n} (\mathrm{Tg} z)^{2n} \sqrt{\left[1+\left(\frac{\nu}{\mu}\right)^2\right]\left[1+\left(\frac{\nu}{\mu-1}\right)\right]\ldots\left[1+\left(\frac{\nu}{\mu-2n+1}\right)^2\right]} \cdot \mathrm{Sin}\left(\mathrm{A.Tg}\frac{\nu}{\mu} + \mathrm{A.Tg}\frac{\nu}{\mu-1} + \ldots \ldots + \mathrm{A.Tg}\frac{\nu}{\mu-2n+1}\right),$$

quæ igitur ambæ valent, dum $z$ numerice $< 1$ est, $\mu$ et $\nu$ realibus quibuscumque (salvâ conditione modo commemoratâ, si forte $\mu$ numerus int. aut $o$ fuerit). —

Per se patet, si in his ponerentur successive $\nu = o$ et $\mu = o$, recuperaturos nos fore æquationes illas (II.A.b′) et (II.B.b′) una cum (20′). —

Quod attinet ad usum æquationum (II) generalium seu q. i. v. æquationis ipsius (I″) seu (I), dum $u$ numerice $= 1$ est, dijudicandum in Parte harum Exercitationum sequenti iis, quæ ad hunc usque diem eademque profecto non omnia satis accurate probata fuerint, adjicienda nonnulla gravioris momenti vel potius totam hanc rem reficiendam curabimus. —

# CONSÉQUENCES NECÉSSAIRES DE L'ÉQUATION DE LA CONTINUITÉ DES FLUIDES

EXPOSÉES PAR

**E. EDLUND.**

L'intégrale des équations différentielles, desquelles dépend le mouvement des fluides, contient, comme on sait, des fonctions arbitraires, qui devront être déterminées par les conditions du mouvement spécial, qu'on considère. Lagrange a, le premier, cherché à les déterminer à l'aide des équations qui expriment que les particules, situées au commencement du mouvement à la surface du vase ou à la surface libre, se meuvent constamment durant le mouvement suivant ces surfaces. Cette hypothèse, bien qu'elle contribue à la détermination de ces fonctions arbitraires et, d'ailleurs, indique une propriété importante des fluides, n'était pas, à ce que nous savons, démontrée jusqu' à ce que M. A. F. Svanberg, dans une dissertation, insérée aux Mémoires de l'Academie Royale des Sciences de Stockholm pour l'année 1839, l'avait déduite comme une con-

sequence nécessaire de la continuité, dans le cas d'une masse fluide incompressible, la surface du vase étant engendrée par la révolution d'une courbe quelconque. Dans une dissertation précédente nous avons démontré, par la méthode de M. Svanberg, cette propriété pour les fluides incompressibles, quelle que soit la forme du vase. Ici, en généralisant cette démonstration, nous ferons voir, que la propriété en question a lieu même pour les fluides compressibles, en supposant toutefois que l'équation de la continuité subsiste toujours.

## §. 1.

### Du mouvement des particules fluides, situées au commencement du mouvement à la surface du vase.

1. Si une particule quelconque du fluide se meut constamment suivant la surface du vase, il faut que la normale de la surface soit toujours perpendiculaire à la ligne qui indique la direction du mouvement de la particule. Par conséquent, si $L=o$ est l'équation de la surface, rapportée aux axes rectangulaires, et que $u$, $v$, $w$ indiquent la vélocité de la particule suivant ces axes, nous aurons à satisfaire à l'équation suivante

$$\frac{dL}{dx}u+\frac{dL}{dy}v+\frac{dL}{dz}w=o \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Or, si au lieu des axes rectangulaires nous admettons des

coordonnées polaires, qui sont les plus commodes ici, où il s'agit du mouvement des particules dans la surface libre, cette équation se transforme de la manière suivante:

Pour les particules situées à la surface, ou pour la surface elle-même nous avons

$$x = R\,\mathrm{Cos}\,\theta\,; \quad y = R\,\mathrm{Sin}\,\theta\,; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

et, si nous considérons une particule quelconque dans la masse fluide,

$$x = r\,\mathrm{Cos}\,\theta\,; \quad y = r\,\mathrm{Sin}\,\theta\,; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

$\theta$ indiquant l'angle formé par le rayon vecteur $R$ ou $r$ avec une ligne parallèle à l'axe des $x$.

En général nous avons

$$\left.\begin{aligned} \frac{dL}{dx} &= \frac{dL}{dR}\frac{dR}{dx} + \frac{dL}{d\theta}\frac{d\theta}{dx}\,; \\ \frac{dL}{dy} &= \frac{dL}{dR}\frac{dR}{dy} + \frac{dL}{d\theta}\frac{d\theta}{dy}\,. \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Or, si dans l'équation (2) on regarde $y$ comme constante *), on trouve

$$1 = \mathrm{Cos}\,\theta\,\frac{dR}{dx} - R\,\mathrm{Sin}\,\theta\,\frac{d\theta}{dx}\,,$$

$$o = \mathrm{Sin}\,\theta\,\frac{dR}{dx} + R\,\mathrm{Cos}\theta\,\frac{d\theta}{dx}\,;$$

---

*) Quoique $x$ et $y$ soient liés entre eux par l'équation de la surface du vase, on peut néanmoins supposer $y$ constant, $x$ étant variable, et réciproquement, parcequ' on considère dans l'équ. (4) la fonction elle-même comme une variable dépendante de $x$ et $y$.

donc

$$\frac{dR}{dx} = \mathrm{Cos}\,\theta\,; \quad \frac{d\theta}{dx} = -\frac{\mathrm{Sin}\,\theta}{R}\,;$$

Et de même, si $x$ est supposé constant

$$\frac{dR}{dy} = \mathrm{Sin}\,\theta\,; \quad \frac{d\theta}{dy} = \frac{\mathrm{Cos}\,\theta}{R}\,.$$

Les valeurs des $\frac{dR}{dx}$, $\frac{d\theta}{dx}$ etc. étant substituées dans l'équ. (4), nous aurons

$$\left.\begin{aligned} \frac{dL}{dx} &= \frac{dL}{dR}\,\mathrm{Cos}\,\theta - \frac{1}{R}\,\frac{dL}{d\theta}\,\mathrm{Sin}\,\theta\,; \\ \frac{dL}{dy} &= \frac{dL}{dR}\,\mathrm{Sin}\,\theta + \frac{1}{R}\,\frac{dL}{d\theta}\,\mathrm{Cos}\,\theta\,. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

Soit $\mu$ la vélocité suivant le rayon vecteur et $\varepsilon$ la vélocité angulaire; soit de plus $\mu_R$, $\varepsilon_R$ ces mêmes vélocités pour les particules contiguës à la surface, et $w_R$ la valeur correspondante de $w$; nous obtiendrons de l'équ. (2)

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{dx}{dt} = \mu_R\,\mathrm{Cos}\,\theta - R\,\varepsilon_R\,\mathrm{Sin}\,\theta\,, \\ v &= \frac{dy}{dt} = \mu_R\,\mathrm{Sin}\,\theta + R\,\varepsilon_R\,\mathrm{Cos}\,\theta\,. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (6)$$

donc

$$\frac{dL}{dx}\,u = \mu_R\,\frac{dL}{dR}\,\mathrm{Cos}^2\theta - \varepsilon_R\,R\,\frac{dL}{dR}\,\mathrm{Cos}\theta\mathrm{Sin}\theta - \frac{\mu_R}{R}\,\frac{dL}{d\theta}\,\mathrm{Cos}\theta\mathrm{Sin}\theta + \varepsilon_R\,\frac{dL}{d\theta}\,\mathrm{Sin}^2\theta\,;$$

$$\frac{dL}{dy}\,v = \mu_R\,\frac{dL}{dR}\,\mathrm{Sin}^2\theta + \varepsilon_R\,R\,\frac{dL}{dR}\,\mathrm{Sin}\theta\,\mathrm{Cos}\theta + \frac{\mu_R}{R}\,\frac{dL}{d\theta}\,\mathrm{Cos}\theta\mathrm{Sin}\theta + \varepsilon_R\,\frac{dL}{d\theta}\,\mathrm{Cos}^2\theta\,.$$

Ainsi l'équation (1) aura la forme suivante

$$\frac{dL}{dR}\mu_R + \frac{dL}{d\theta}\varepsilon_R + \frac{dL}{dz}w_R = o \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Or, si nous différentions l'équation de la surface, en considérant successivement $z$ et $\theta$ comme constantes, nous trouverons

$$\frac{dL}{dR}dR + \frac{dL}{d\theta}d\theta = o \; ;$$

donc

$$\frac{dR}{d\theta} = -\frac{\frac{dL}{d\theta}}{\frac{dL}{dR}} \; ,$$

et

$$\frac{dL}{dR}dR + \frac{dL}{dz}dz = o \; ;$$

ce qui donne

$$\frac{dR}{dz} = -\frac{\frac{dL}{dz}}{\frac{dL}{dR}} \; .$$

Ainsi l'équation à satisfaire pour qu'une particule quelconque du fluide qui au commencement du mouvement a été à la surface doive toujours $y$ demeurer, deviendra

$$-\mu_R + \varepsilon_R\frac{dR}{d\theta} + w_R\frac{dR}{dz} = o \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

2. Si l'on emploie des axes rectangulaires, l'équation de la continuité a la forme connue

$$\frac{d.\varrho}{dt}+\frac{d.\varrho u}{dx}+\frac{d.\varrho v}{dy}+\frac{d.\varrho w}{dz}=o \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

($\varrho$ indiquant la densité).

Si l'on emploie des coordonnées polaires, cette équation se transforme de la manière suivante:

$$\left.\begin{aligned}\frac{d.\varrho u}{dx}&=u\left(\frac{d\varrho}{dr}\frac{dr}{dx}+\frac{d\varrho}{d\theta}\frac{d\theta}{dx}\right)+\varrho\left(\frac{du}{dr}\frac{dr}{dx}+\frac{du}{d\theta}\frac{d\theta}{dx}\right),\\ \frac{d.\varrho v}{dy}&=v\left(\frac{d\varrho}{dr}\frac{dr}{dy}+\frac{d\varrho}{d\theta}\frac{d\theta}{dy}\right)+\varrho\left(\frac{dv}{dr}\frac{dr}{dy}+\frac{dv}{d\theta}\frac{d\theta}{dy}\right).\end{aligned}\right\}\ldots\ldots(10)$$

Des équations (5) on obtient

$$\frac{dx}{dt}=u=\mu\,\mathrm{Cos}\,\theta-\varepsilon r\,\mathrm{Sin}\,\theta\ ,$$

$$\frac{dy}{dt}=v=\mu\,\mathrm{Sin}\,\theta+\varepsilon r\,\mathrm{Cos}\,\theta\ ;$$

d'où l'on tire

$$\frac{du}{dr}=\mathrm{Cos}\,\theta\frac{d\mu}{dr}-r\,\mathrm{Sin}\,\theta\frac{d\varepsilon}{dr}-\varepsilon\,\mathrm{Sin}\,\theta\ ,$$

$$\frac{du}{d\theta}=-\mu\,\mathrm{Sin}\,\theta+\mathrm{Cos}\,\theta\frac{d\mu}{d\theta}-r\,\mathrm{Sin}\,\theta\frac{d\varepsilon}{d\theta}-\varepsilon r\,\mathrm{Cos}\,\theta\ ;$$

et de même

$$\frac{dv}{dr}=\mathrm{Sin}\,\theta\frac{d\mu}{dr}+r\,\mathrm{Cos}\,\theta\frac{d\varepsilon}{dr}+\varepsilon\,\mathrm{Cos}\,\theta\ ,$$

$$\frac{dv}{d\theta}=\mathrm{Sin}\,\theta\frac{d\mu}{d\theta}+\mu\,\mathrm{Cos}\,\theta+r\,\mathrm{Cos}\,\theta\frac{d\varepsilon}{d\theta}-r\varepsilon\,\mathrm{Sin}\,\theta\ .$$

Par des substitutions et des éliminations nécessaires, l'équation (9) est transformée en

$$\frac{d\varrho}{dt}+\mu\frac{d\varrho}{dr}+\varrho\frac{d\mu}{dr}+\frac{\varrho\mu}{r}+\varepsilon\frac{d\varrho}{d\theta}+\varrho\frac{d\varepsilon}{d\theta}+\frac{d.\varrho w}{dz}=o$$

ou

$$\frac{d\varrho}{dt}+\frac{d\ r\mu\varrho}{rdr}+\frac{d.\varrho\varepsilon}{d\theta}+\frac{d.\varrho w}{dz}=o \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

3. Si l'on conçoit dans le vase deux plans parallèles, perpendiculaires à l'axe des $z$, dont la distance soit $dz$, il faut que la différence algébrique entre les quantités de la masse fluide qui, pendant l'instant $dt$, passent par chaqu'un de ces plans soit égale à l'accroissement ou à la diminution pour le même temps de la masse fluide, contenue entre ces mêmes plans.

Ainsi, si $\varphi(z)$ est l'expression de la quantité du corps fluide, qui pendant le temps $dt$ traversent un certain plan, et que $\psi(\varrho)$ est l'expression de l'accroissement ou de la diminution de la masse fluide, continue entre ce plan et celui successivement suivant, on obtient

$$-[\varphi(z+dz)-\varphi(z)]=\psi(\varrho).$$

Obs. La raison à ce qu'il faut mettre le signe (—) devant le membre gauche de l'équation précédente, se trouve de la manière suivante:

Si ces plans tous deux transmettent une quantité de mas-

se fluide en sens positif de l'axe des $z$, les fonctions $\varphi(z)$ et $\varphi(z+dz)$ sont toutes deux positives. Si, dans ce cas, $\varphi(z+dz)$ est plus grande que $\varphi(z)$, il en proviendra entre ces plans une diminution de masse fluide; d'où l'on voit, que $\psi(\varrho)$ doit être négative, et par conséquent qu'il faut mettre le signe (—) devant le membre gauche. Si, au contraire, $\varphi(z+dz)$ est plus petite que $\varphi(z)$, il naitra une condensation entre les plans, ou $\psi(\varrho)$ devient positive; mais le membre gauche étant dans ce cas lui-même négatif, on doit encore prendre le signe (—). D'une manière analogue on trouve, que le signe (—) doit être posé devant le membre gauche, si $\varphi(z)$ et $\varphi(z+dz)$ sont toutes deux négatives, ou, autrement dit, si les plans transmettent une quantité de masse fluide dans la direction contraire à celle de l'axe des $z$. Si, enfin, $\varphi(z)$ est positive et $\varphi(z+dz)$ négative; c. à. d. si le plan inférieur transmet une quantité de masse fluide en sens positif de l'axe des $z$ et le plan supérieur la transmet dans la direction contraire, il est évident qu'une condensation naisse entre ces deux plans; ainsi $\psi(\varrho)$ est dans ce cas positive; mais, le membre gauche ou $\frac{d.\varphi}{dz}\,dz$ étant, dans ce cas, lui-même négatif, il faut mettre le signe (—) au devant. De la même manière on peut démontrer que le membre gauche doit avoir le signe (—), si $\varphi(z)$ est negative et $\varphi(z+dz)$ positive; dans quel cas une dilatation naît entre les deux plans.

Ainsi on obtient

$$-dt\frac{d.\int_0^{2\pi}\int_0^R \varrho w r dr d\theta}{dz}dz = dt\int_0^{2\pi}\int_0^R \frac{d\varrho}{dt}dz\,r\,dr\,d\theta, \quad \ldots\ldots (12)$$

ou, si $\varrho$ signifie la densité au limite $R$,

$$-\int_0^{2\pi}\left(\int_0^R \frac{d.\varrho w}{dz}rdr+\varrho_R w_R R\frac{dR}{dz}\right)d\theta=\int_0^{2\pi}\int_0^R \frac{d\varrho}{dt}rdr\,d\theta \ldots\ldots (13)$$

En substituant dans cette équation la valeur de $\frac{d.\varrho w}{dz}$, tirée de l'équation (11), on obtient

$$\int_0^{2\pi}\left[\varrho_R w_R R\frac{dR}{dz}-\int_0^R \frac{d.r\varrho\mu}{dr}dr-\int_0^R \frac{d.\varrho\varepsilon}{d\theta}rdr\right]d\theta=0 \ldots\ldots (14)$$

Enfin, en observant que

$$\int_0^R \frac{d.r\varrho\mu}{dr}\,dr=\varrho_R R\mu_R\,,$$

et

$$\int_0^R \frac{d.\varrho\varepsilon}{d\theta}r\,dr=\frac{d.\int_0^R \varrho\varepsilon r dr}{d\theta}-\varrho_R\varepsilon_R R\frac{dR}{d\theta}\,,$$

on trouve

$$\int_0^{2\pi}\varrho_R R\left(w_R\frac{dR}{dz}-\mu_R+\varepsilon_R\frac{dR}{d\theta}\right)d\theta=\int_0^{2\pi}\frac{d.\int_0^R \varrho\varepsilon r dr}{d\theta}d\theta \ldots\ldots (15)$$

$\varepsilon$ est en général une fonction de $r$, $\theta$, $z$, $t$ qui doit être telle, que pour $\theta = o$ et $\theta = 2\pi$ elle obtienne la même valeur, pourvu que $r$, $z$, $t$ ne varient pas. Cela étant, il est aisé de voir, que la valeur de l'intégrale déf. $\int_{\varrho}^{R} \varepsilon r\,dr$ restera la même pour ces valeurs de $\theta$. Ainsi, si nous désignons cette intégrale par $\varphi(\theta)$, le dernier membre de l'équation (15) devient

$$= \varphi(2\pi) - \varphi(o) = o\,.$$

Donc

$$\int_{o}^{2\pi} \varrho_R R\left(-\mu_R + \varepsilon_R \frac{dR}{d\theta} + w_R \frac{dR}{dz}\right) d\theta = o. \quad . \quad , \quad . \quad . \qquad (16)$$

4. Si $\beta$ signifie l'angle que forme, avec la normale de la surface, la ligne suivant laquelle se meut une particule du fluide, située à la surface, et si $\lambda$ signifie la vélocité totale de la particule, on obtient

$$\mathrm{Cos}\,\beta = \frac{\mu_R \frac{dL}{dR} + \varepsilon_R \frac{dL}{d\theta} + w_R \frac{dL}{dz}}{\pm \sqrt{\left(\frac{dL}{dR}\right)^2 + \frac{1}{R^2}\left(\frac{dL}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dL}{dz}\right)^2}\,\lambda},$$

ou

$$\mathrm{Cos}\,\beta = \frac{\mu_R - \varepsilon_R \frac{dR}{d\theta} - w_R \frac{dR}{dz}}{\pm \sqrt{1 + \frac{1}{R^2}\left(\frac{dR}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dR}{dz}\right)^2}\,\lambda} \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (17)$$

Mais puisque la surface du vase est supposée telle, qu'à

une valeur quelconque de $z$ et $\theta$ réponde une seule valeur de $R$, il en resulte que l'angle, formé par le rayon vecteur prolongé avec la partie de la normale qui est au dedans de la surface, ne puisse jamais être aigu; ainsi le cos. de cet angle qui est égal à $\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{R^2}\left(\frac{dR}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dR}{dz}\right)^2}}$ doit toujours être négatif. Mais Cos. $\beta$ ainsi déterminé, s'il n'est pas $=o$, sera nécessairement positif. Ainsi, parceque le signe des élements dont se compose l'intégrale définie de l'équation (16) ne peut pas varier, nous aurons

$$-\mu_R+\varepsilon_R\frac{dR}{d\theta}+w_R\frac{dR}{dz}=o\ .$$

On voit aisement, que la méthode de démonstration dont nous nous sommes servi plus haut, avec les commutations nécessaires, peut s'appliquer pareillement au cas, où plusieurs valeurs du $R$ répondent à une valeur quelconque donnée de $z$ et $\theta$.

5. Quand la surface du vase est exprimée par plusieurs équations, $f(R,\theta,z)=o$, $f_{,}(R,\theta,z)=o$, $f_{,,}(R,\theta,z)=o$ etc., nous obtenons au lieu de l'équation (15)

$$\int_0^{\theta'}R\varrho_R\left(-\mu_R+\varepsilon_R\frac{dR}{d\theta}+w_R\frac{dR}{dz}\right)d\theta+\int_{\theta'}^{\theta''}R_{,}\varrho_{R,}\left(-\mu_{R,}+\varepsilon_{R,}\frac{dR_{,}}{d\theta}+w_{R,}\frac{dR_{,}}{dz}\right)d\theta$$

$$+\int_{\theta''}^{\theta'''}R_{,,}\varrho_{R,,}\left(\qquad\qquad\right)d\theta+\ldots\ldots\ldots+\int_{\theta^n}^{2\pi}R_n\varrho_{R_n}\left(\qquad\qquad\right)d\theta=$$

$$=\int_{o}^{\theta'}\frac{d.\varphi(\theta)}{d\theta}d\theta+\int_{\theta'}^{\theta''}\frac{d.\varphi_{,}(\theta)}{d\theta}d\theta+\int_{\theta''}^{\theta'''}\frac{d.\varphi_{,,}(\theta)}{d\theta}d\theta+\ldots+\int_{\theta^{n}}^{2\pi}\frac{d.\varphi_{n}(\theta)}{d\theta}d\theta=-\varphi(o)$$

$$+\varphi(\theta')-\varphi_{,}(\theta')+\varphi_{,}(\theta'')-\varphi_{,,}(\theta'')+\ldots\ldots\ldots-\varphi_{n}(\theta^{n})+\varphi_{n}(2\pi)\ \ldots\ldots\ (18)$$

**Or, nous trouvons aisement**

$$\varphi(o)=\varphi_{n}(2\pi)\,;\quad \varphi(\theta')=\varphi_{,}(\theta')\,;\quad \varphi_{,}(\theta'')=\varphi_{,,}(\theta'')\,;\quad \&c.$$

**Enfin, puisque les éléments dont se composent les intégrales définies de l'équation (18) ont toujours le même signe, on obtient**

$$-\mu_{R}+\varepsilon_{R}\frac{dR}{d\theta}+w_{R}\frac{dR}{dz}=o\,;$$

$$-\mu_{R_{,}}+\varepsilon_{R_{,}}\frac{dR_{,}}{d\theta}+w_{R_{,}}\frac{dR_{,}}{dz}=o\,;$$

$$-\mu_{R_{,,}}+\varepsilon_{R_{,,}}\frac{dR_{,,}}{d\theta}+w_{R_{,,}}\frac{dR_{,,}}{dz}=o\,;$$

$$\&c.\qquad\&c.\qquad\&c.$$

**Il résulte donc nécessairement de l'équation (11), que dans le mouvement d'un fluide compressible ou incompressible, enfermé dans un vase de forme quelconque, les particules contiguës á la surface à un temps quelconque $y$ resteront toujours.**

**6. Il est évident que cette démonstration subsistera encore dans le cas où le fluide s'écoulerait par un orifice quelconque. Bien que l'équation (12) n'ait pas lieu entre les plans parallèles qui contiennent cet orifice, la propriété démontrée devra subsister en général, puisque la direction de l'axe des $x$ est parfaitement arbitraire.**

## §. 2.

**Du mouvement des particules d'un liquide, situées au commencement du mouvement à la surface libre.**

7. Si autour de l'axe des $z$, mené à un point quelconque de la surface libre, l'on conçoit un cylindre dont le rayon est $r$, et un autre dont le rayon est $r+dr$; il faut, comme dans le § précédent, que la différence algébrique entre les quantités de la masse liquide qui, dans le temps $dt$, traversent la surface de chaqu'un de ces deux cylindres soit égale à la variation de la masse, continue entre eux.

Conséquemment, si $f(z_{,}, r, \theta, t) = o$ est l'équation de la surface libre et que $z$, $r$, $\theta$ sont les coordonnées courantes de la surface du vase et d'un point quelconque au dedans de la masse liquide, on obtient

$$-dt\,\frac{d.\int_0^{2\pi}\int_z^{z_{,}}\mu\varrho r\,dz\,d\theta}{dr}\,dr = \frac{d.\int_0^{2\pi}\int_z^{z_{,}}\varrho r\,dr\,dz\,d\theta}{dt}\,dt \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

ou, si $\varrho_z$, $\varrho_{z_{,}}$, $\mu_z$, $\mu_{z_{,}}$ désignent les valeurs de $\varrho$ et $\mu$ aux limites,

$$-\int_0^{2\pi}\left[\mu_{z_{,}}\varrho_{z_{,}}r\frac{dz_{,}}{dr}-\mu_z\varrho_z r\frac{dz}{dr}+\int_z^{z_{,}}\frac{d.\mu\varrho r}{dr}dz\right]d\theta=\int_0^{2\pi}\left[\varrho_{z_{,}}r\frac{dz_{,}}{dt}+\int_z^{z_{,}}\frac{d\varrho}{dt}r\,dz\right]d\theta \quad . \quad (20)$$

En éliminant $\frac{d.\varrho r\mu}{r\,dr}$ entre cette équation et l'équat. (11), on

obtient

$$\int_0^{2\pi}\left[\mu_{z,}\varrho_{z,}\frac{dz,}{dr}-\mu_z\varrho_z\frac{dz}{dr}-\varrho_{z,}w_{z,}+\varrho_z w_z+\varrho_{z,}\frac{dz,}{dt}-\int_z^{z,}\frac{d.\varrho\varepsilon}{d\theta}dz\right]d\theta=o\ldots\ldots(21)$$

Mais, on a

$$\varrho_{z,}\varepsilon_{z,}\frac{dz,}{d\theta}-\varrho_z\varepsilon_z\frac{dz}{d\theta}-\frac{d.\int_z^{z,}\varrho\varepsilon\,dz}{d\theta}=-\frac{\int_z^{z,}d.\varrho\varepsilon}{d\theta}dz$$

Ainsi l'équation (21) se transforme en

$$\int_0^{2\pi}\left[\varrho_{z,}\left(\frac{dz,}{dt}+\mu_{z,}\frac{dz,}{dr}+\varepsilon_{z,}\frac{dz,}{d\theta}-w_{z,}\right)-\varrho_z\left(\mu_z\frac{dz}{dr}+\varepsilon_z\frac{dz}{d\theta}-w_z\right)\right]d\theta=$$

$$\int_0^{2\pi}\frac{d.\int_z^{z,}\varrho\varepsilon\,dz}{d\theta}d\theta\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\quad(22)$$

Or, de ce que nous avons dit plus haut sur la fonction $\varepsilon$, on voit aisement que le membre droit de l'équation précédente est égale à zero.

On obtient ainsi

$$\int_0^{2\pi}\left[\varrho_{z,}\left(\frac{dz,}{dt}+\mu_{z,}\frac{dz,}{dr}+\varepsilon_{z,}\frac{dz,}{d\theta}-w_{z,}\right)-\varrho_z\left(\mu_z\frac{dz}{dr}+\varepsilon_z\frac{dz}{d\theta}-w_z\right)\right]d\theta=o\ldots..(23)$$

8. L'équation qui doit être satisfaite, si les particules du liquide qui au commencement du mouvement ont été à la sur-

face du vase continueront d'y rester, est

$$-\mu_r+\varepsilon_r\frac{dr}{d\theta}+w_r\frac{dr}{dz}=o\,,$$

ou

$$-\mu_r\frac{dz}{dr}+\varepsilon_r\frac{dr}{d\theta}\frac{dz}{dr}+w_r\frac{dr}{dz}\frac{dz}{dr}=o\quad\ldots\ldots\quad(24)$$

Soit $F(r,\ \theta,\ z)=o$ l'équation de la surface du vase, nous aurons

$$\frac{dF}{dr}dr+\frac{dF}{d\theta}d\theta=o;\quad\text{d'où}\quad\frac{dr}{d\theta}=-\frac{\dfrac{dF}{d\theta}}{\dfrac{dF}{dr}}\,,$$

et

$$\frac{dF}{dz}dz+\frac{dF}{dr}dr=o;\quad\text{d'où}\quad\frac{dz}{dr_1}=-\frac{\dfrac{dF}{dr}}{\dfrac{dF}{dz}}\;;$$

Donc

$$\frac{dr}{d\theta}\frac{dz}{dr}=\frac{\dfrac{dF}{d\theta}}{\dfrac{dF}{dz}}=-\frac{dz}{d\theta}\,.$$

D'ailleurs

$$\frac{dr}{dz}\frac{dz}{dr}=1$$

Ainsi l'équation (24) obtiendra la forme

$$-\mu_r \frac{dz}{dr} - \varepsilon_r \frac{dz}{d\theta} + w_r = o \ ,$$

ou, ce qui revient au même,

$$\mu_z \frac{dz}{dr} + \varepsilon_z \frac{dz}{d\theta} - w_z = o \, .$$

Donc, l'équation (23) se réduit à

$$\int_0^{2\pi} \varrho_{z_1} \left( \frac{dz_1}{dt} + \mu_{z_1} \frac{dz_1}{dr} + \varepsilon_{z_1} \frac{dz_1}{d\theta} - w_{z_1} \right) d\theta = o \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25)$$

9. Cherchons maintenant l'équation à satisfaire pour que les particules contiguës à la surface libre $y$ restent pendant le mouvement.

Soit $f(z_1, \theta, r, t) = o$ . . . . . (26)

l'équation de la surface libre au temps $t$.

Au temps $t + dt$ cette équation deviendra

$$f(z_1, \theta, r, t+dt) = o \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (27)$$

Les cordonnées d'une particule quelconque au temps $t$ étant $r$, $\theta$, $z_1$ et devant satisfaire à l'équation (26) sont chanchées au temps $t+dt$ en $r+\mu_{z_1} dt$, $\theta+\varepsilon_{z_1} dt$, $z_1+w_z dt$; celles-ci introduites dans l'équation (27) doivent $y$ satisfaire, si la particule au temps $t+dt$ restera à la surface libre. Donc, l'équation cherchée devient

$$f(z_1+w_{z_1} dt, \ \theta+\varepsilon_{z_1} dt, \ r+\mu_{z_1} dt, \ t+dt) = o \, ,$$

ou

$$f(z_{,},\ \theta,\ r,\ t)+\left(\frac{df}{dz_{,}}w_{z_{,}}+\frac{df}{d\theta}\varepsilon_{z_{,}}+\frac{df}{dr}\mu_{z_{,}}+\frac{df}{dt}\right)dt=o \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (28)$$

Les coordonnées $(z_{,},\ \theta,\ r)$ de la particule satisfaisant à l'équation (26), cette équation se réduit à

$$\frac{df}{dt}+\frac{df}{dr}\mu_{z_{,}}+\frac{df}{d\theta}\varepsilon_{z_{,}}+\frac{df}{dz_{,}}w_{z_{,}}=o\ , \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (29)$$

ou en la divisant par $\frac{df}{dz_{,}}$ *)

$$-\frac{dz_{,}}{dt}-\mu_{z_{,}}\frac{dz_{,}}{dr}-\varepsilon_{z_{,}}\frac{dz_{,}}{d\theta}+w_{z_{,}}=o \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (30)$$

10. S'il y avait de particules du liquide qui, au temps $t$ étant à la surface libre, n'y seraient pas au temps $t+dt$, on voit aisement qu'on doit les chercher entre la surface libre et le plan d'où $z$ est compté; d'où il s'ensuit que, si les coordonnées de toutes ces particules sont successivement substituées dans l'équation (27), ou, ce qui revient au même, dans l'équation (30), nous obtiendrons des valeurs qui sont toujours affectées du même signe. Ainsi, les éléments dont se compose l'intégrale définie de l'équation (25) conservant toujours le même signe, tant qu'ils ne soient pas égaux à zéro, nous

---

*) L'équation de la surface libre, comme on peut voir de l'équ. (19), étant supposée telle qu' à une valeur quelconque de $r$ et $\theta$ réponde une seule valeur de $z$; il s'ensuit que $\frac{df}{dz_{,}}$ ne chanchera pas de signe. —

tirons de cette équation

$$\frac{dz_1}{dt}+\mu_{z_1}\frac{dz_1}{dr}+\varepsilon_{z_1}\frac{dz_1}{d\theta}-w_{z_1}=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (31)$$

Donc, à l'aide de l'équation (11) nous avons démontré, que les particules du liquide qui au commencement du mouvement ont été à la surface libre doivent $y$ rester.

# SYMBOLÆ
# AD REM NUMARIAM MUHAMMEDANORUM.

EX MUSEO REGIO HOLMIENSI

EDIDIT

**CAROLUS JOHANNES TORNBERG**

---

## I.

Septuaginta, et quod excurrit, abhinc annis Carolus Aurivillius, rerum orientalium indagator sui ævi ferme sollertissimus, numerum haud exiguum numorum cuficorum, quos, anno 1771 in Oelandiæ insula repertos, a semet ipso delineatos æri incidendos curaverat, in secundo hujus regiæ societatis actorum novorum volumine, quæ sua erat eximia doctrina mentisque acumen acerrimum, erudite descripsit, itaque inter nos primus[1] oculos doctorum atque animos in illos Orientis thesauros ver-

---

1) Ante Aurivillium fuerunt quidem, qui hanc materiam perstrinxerunt; at, si unum Clewberg exceperis, omnes omnino obiter modo et potius curiositate quadam, quam vera in rem penitus penetrandi cupiditate ducti, monetam tractabant cuficam. Inter ceteros tamen in hac re, ut in quacunque litterarum orientalium parte, Olaus Celsius eminet, qui si ejusmodi numis operam dederat diligentiorem, omnes facile anteverterat. In Actis Literariis Sueciæ anni 1733 ex. c. p. 113 cuficorum numorum fecit mentionem.

tit, quos terra suecana fere innumeros deinceps in lucem edidit. Neque post eum defuerunt, qui, monumenta patriæ vetusta illustraturi, has etiam tetigerunt antiquitatis reliquias eo magis allicientes, quo difficilior sit explicatu ratio, quæ eas in regiones septentrionales importaverit. At quamvis ita multa summi momenti oblivioni eriperentur, tantum tamen abfuit, ut desideriis plane satis factum esset eorum, qui his tandem temporibus, linguam Arabum et historiam ac geographiam Orientis melius edocti, priorum conamina novo submitterent examini, ut numorum interpretes, quasi aliud agentes munere explicandi non raro functi, si non longe alia, quam quæ vere exhiberent inscriptiones, legisse viderentur, tamen in miras delaberentur conjecturas, ab accuratiore rerum consideratione facile eversas[1]. Neque id mirum; res enim est ambitus maximi eaque laborat difficultate, ut nemo, nisi litteris Orientis bene imbutus totum se ei dederit, in ea rite versari possit, et materia denique ferme nova apparet, quæ celeberrimo Fræhnio non incrementa modo amplissima, sed leges quoque et præcepta revera debet. Quare si hujus ævi viri docti, subsidiis cujuscunque generis olim incognitis adjuti, veterum illorum interpretamenta facili negotio censere et corrigere possint, id studio rei ardentiori erectiorique ingenio non æque adscribendum est, ac progredienti scientiæ.

Crevit interea semperque crescit in variis Sueciæ museis

---

1) Rem loquor notissimam, quæ si Tychsenio illi, cujus merita de re numaria orientali nemo umquam denegaverit, sæpius acciderit, levior in aliis ejusdem ætatis viris apparebit.

numorum orientalium moles, præcipue his quinque postremis lustris, postquam lege cautum est, ne quidquid in terra fuerit inventum, sive sint numi sive aliæ res antiquæ, prius divendatur, quam reipublicæ fuerit oblatum, ut ea, quæcunque conservanda esse habuerit omnia, pretio triente acuto, emat. Hinc factum est, ut in regio, quod Holmiæ est, antiquitatum museo, collectiones numorum ingentes quotannis accumularentur, et vasta illa plurium millium congeries ipsa sua magnitudine monetæ cuficæ amantes deterrerent. Mortuo jam Hallenbergio, qui, dum in vivis erat, has res mirifico amplectebatur amore, nemo superfuit, qui earum curam apud nos gereret singularem, quum litterarum orientalium studiosi in alias, quæ lætiores iis videbantur, regiones inde a studiorum initio abrepti, a numis, tamquam re leviore, abhorrerent. Diu quidem erat quum mira quadam vi me allexerunt hæc documenta commercii, quod inter Orientem terrasque boreales iis intercesserat sæculis, quibus historia patriæ nondum e tenebris omnino emergere coeperat. Sperabam enim fore, ut, his monumentis vetustatis rite examinatis, via tandem pateret, qua Asiæ et Africæ pecunia in tam dissitas regiones invecta esset. Postquam Havniæ, Lindbergio duce, harum rerum delicias ultimis labiis gustaveram et Parisiis thesauros, quos numophylacium regium complectitur stupendos, aliquamdiu inspexeram, in patriam redux nihil habui antiquius, quam ut, quantum in me esset, museum cuficum holmiense in ordinem redigerem et qualitercunque a me recensitum atque explicatum publici juris facerem. Votis lubens assensit regia academia litterarum humaniorum, historiæ et

antiquitatum, cui hæ collectiones concreditæ sunt, et benevolo Hildebrandi, mihi amicissimi, qui supremus numophylacii est custos, auxilio adjutus experientiaque edoctus, rem anno 1839 aggressus, intra quatuor annorum spatium absolvi. Neque tale negotium, quamquam sæpe molestius, sua caruit mercede. Nam quum fere sex millia numorum cuficorum — tot enim jam tunc temporis continebat museum regium — singulos in suam classem digestos, in indicem retulissem et eos, qui similes erant, separassem, collectionem illam jam antea egregiam adeo auctam vidi, ut ea, quæ jampridem a Malmströmio disposita et magnam partem ab inclyto Hallenbergio in libro "Numismata Orientalia" inscripto explicata, 350 modo numos singulos numeraret, nunc plus 1050 complecteretur, in quorum numero multi inessent insoliti et rarissimi, nec pauci nondum editi. Censura etiam eorum, qui lecti aderant, denuo instituta graves quosdam interpretum errores corrigere mihi licuit, quum lumina adhibere possem, quæ Fræhnius aliique summi nominis viri huic materiei affuderant.

Nihil mihi ferventius exoptandum est, quam ut illam musei regii insignem collectionem, qua fieri potest fide et diligentia descriptam luce publica donem, id quod mox sperare licet, quum regium museum in ampliores ædes transvectum, spatium obtinuerit numis rite componendis necessarium. Et sane dignissima mihi videtur, quæ ab omnibus harum rerum æstimatoribus cognoscatur. Complectitur enim numos octodecim certe

dynastiarum Asiæ et Africæ, intra annos 79 [698, 9] — 393 [1002, 3] cusos, qui omnes omnino in terra Sueciæ inventi sunt [1]. Ne vero interim omni harum rerum notitia careant viri docti, operæ pretium esse duxi, notabiliores quosdam numos cuficos, novissimo tempore demum repertos, prout occasio eos mihi obtulerit, conjunctim interpretari, adjecta fida aliquorum delineatione, qui præ ceteris notandi mihi viderentur, confidens fore, ut rei æqui judices hæc monetæ cuficæ studia benigne accepta mite judicent.

Quo consilio inito, novus Holmiam allatus est thesaurus, qui, anno 1845 inter arandum in agro vetusto prope prædium *Gerete* parocciæ *Fardhem* in insula Gothlandiæ detectus, præter varia ornamenta, annulos, fragmenta bacillorum, in minutas partes diffractorum et magnam numorum occidentalium multitudinem, quinquaginta sex *dirhemos* quoque comprehendebat [2], quorum sedecim magis minusve confracti, omnes vero

---

1) Præter hos magnum numerum possedit museum aliorum Orientis numorum, quibus pretium collectionis non parum augetur.

2) Si integros solos computaveris, summam numorum hîc una repertorum 1680 efficies. Simul, ut sæpissime accidere solet, haud exigua fragmentorum copia inventa est. Inter occidentales, ut a Cel. Hildebrando accepi, duo erant suecani, rege Olavo Skötkonung Sigtunæ cusi; 92 danici, annis 1014—1076; 1610 anglosaxonici, regibus Eadgar, Aethelred II, Cnut, Harold I Harefot, Harthacnut et Edwardo confessore; 7 irlandici, rege Sithric III; 927 germanici, imperantibus Ottonibus (I, II, III) et Conrado Salico, præcipue ex iis terris, quæ juxta Rhenanum fluvium nec procul inde sitæ sunt; 4 byzantini, regibus Basilio II et Constantino XI procusi. Omnia ex argento fuerunt. Ex his annis, comparatis dirhemis, facile concludere licet, quo tempore thesaurus in terram sit depositus.

valde triti plurimique perforati erant. Unus ansulam etiamnunc servabat integram; in alio autem extremæ ejus partes affixæ remanebant. Vero simillimum igitur videtur, eos filo insertos, a feminis Orientis, ut mos ibi fert, pro ornamentis fuisse portatos. Habitus eorum universus, si recte video, testari videtur, eos, longe lateque esse vagatos, antequam, aliis diversi generis admixtis, ex Anglia ut Danageld, vel aliunde in Sueciam inferrentur. Aliud talis longioris eorum itineris documentum inde petendum esse credo, quod anni, quibus singuli cusi sunt, tanto a se distant intervallo, ut antiquissimus annum *Hedjræ* 90 [708], recentissimus autem 389 [998] certe exhibeat. Hæc opinio a numero dynastiarum etiam confirmatur. In tanta enim numorum paucitate undecim classes constituere potui, id quod antea, ne in collectionibus maximis, factum esse memini. Observandum quoque est, multos hîc inesse numos, qui recentiori ætati originem debent, quibus pretium hujus thesauri non parum augetur. Satis enim constat, dirhemos post annum 344 [955] cusos in Suecia valde rarescere, quare 26 modo in museo regio ab anno 346 ad annum 393 notare potui. At hîc decem certe ejusmodi deprehendimus. Inter alios rariores duo quoque adsunt, alter sijaridicus, alter ikhschididicus, quarum classium specimina in nostris terris numquam antea visa sunt. Itaque quamvis primo adspectu parva appareat hæc quasi præda denuo recepta, inter notabilissimas numorum collectiones in Suecia repertas merito eam collocaveris.

Octo sepositis, qui aut fragmenta erant minora, e quibus nihil explorari poterat, aut numi, quorum tituli prorsus evanuerant, quadraginta octo supererant, qui fere omnes, si samanidicos aliquot vulgares exceperis, vel singularitate sua vel raritate sese commendabant. Respectu habito ad diversas, quibus adjungi poterant, dynastiarum classes, sic sese habuerunt:

1) Umajjadici duo.
2) Abbasidici tres.
3) Sassanidicus unus[1].
4) Tahiridici tres.
5) Samanidici viginti septem.
6) Sijaridicus unus.
7) Buwajhidicns unus.
8) Hamdanidici tres.
9) Ikhschididicus unus.
10) Oqailidici tres.
11) Merwanidici tres.

Ordine hoc classium servato, omnes deinceps describam, brevissima modo annotatione adjuncta. Qui pleniorem cupiant harum rerum scientiam, eam in scriptis Frœhnii aliorumque facile invenient.

---

1) Ne offendaris, precor, benevole lector, inter solos cuficos, numum vere pehlevicum invenire, quem tamen a ceteris orientalibus separare nolui.

## I. UMAJJADICI.

### Welîd Primus Khalifa.

1. Vid. Tab. I fig. 1. Partem numi aversam valde oblitteratam delineare omisi. Ansula integra numus munitus est.

A. I. لا اله الا *Non est Deus nisi*
الله وحده *Allâh unicus,*
لا شريك له *cui non est socius.*

In margine: بسم الله ضرب هذا الدرهم بماهى فى سنة تسعين *Nomine Dei. Cusus est hic dirhem in Máhi anno nonagesimo* [708, 9].

A. II. الله احد الله *Deus est unus, Deus*
الصمد لم يلد و *æternus; nec genuit*
لم يولد ولم يكن *nec genitus est, nec*
له كفوا احد *ei est æqualis ullus.* (Coran. 112).

In margine: محمد رسول الله ارسله بالهدى ودين الحق ليظهره على الدين كله ولو كره المشركون *Muhammed est legatus Dei, missus, ut doctrinam religionemque veram omnibus religionibus superiorem reddat, etiamsi pluriorum deorum cultores detrectant.* (Coran. 9, 33.)

Inter ceteros hic eximium locum obtineat oportet. Non ætate modo primus, sed loco etiam, quo cusus est, notabilis et adhuc ineditus primum, ni fallor, oculis numismaticorum of-

fertur. Duos nunc possidet regium museum dirhemos, in hac urbe cusos, par nobilissimum. Anno 1840 inter stupendam numorum cuficorum copiam, qui in insula Oelandiæ inventi sunt [1], fragmentum offendi dirhemi, qui in Mâhi cusus, ex anno خمس وتـ modo servabat, e quibus litteris tamen annum 95 [713] facile efficies. Litteris ad me datis, cl. Frœhnius eum ineditum et rarissimum declaravit, id quod eodem jure de præsente valet, ut ex libro ejusdem Frœhnii, Quinque centuriæ etc. inscripto apparet, in quo annos tantum 91, 92, 98 et 129 in numis Omajjadarum Mahiticis afferre potuit vir venerandus. De nomine urbis *Máhi*, quod frustra apud geographos orientales investigavi, in commentatione de Museo Sprewitziano p. 93 sqq. erudite ille disputavit et non sine magna veritatis specie contendit, hac appellatione *Hamedanam*, Irâcæ persicæ urbem, caput Mediæ antiquæ, de quo paullo post hîc mentio erit, significari.

### Jezîd Secundus aut Hischâm Khalifa.

2. Vid. Tab. I fig. 2. Numus perforatus et valde præcisus.

A. I præcedentis epigraphen habet.

In margine: بسم الله ـ ب هذا الدرهم بواسط سنة تسع ومايـة *Nomine Dei.* Cusus *est hic dirhem Wâsithæ anno centesimo nono* [727, 8].

A. II. æque ac margo, easdem ac N:o 1 præbet inscriptiones.

Numus lacerus et, tertia fere parte amissa, duobus deformatur foraminibus, quorum alterum, anni numerum primum

---

1) In museo regio, ut ceteri a me hîc citati thesauri, jam servantur.

perrumpens, litterarum ductus nimis dilatavit. Nihilominus satis superest, quo vocabulum تسع hoc loco bene agnoscas. Quod si ita est, numus est rarissimus nec antea in Suecia inventus, quid? quod ipse Frœhnius, qui (in "Quinque Centuriis" p. 295) primus ejusdem edidit exemplar, id in museo britanico Londini solum invenire potuit. Ceteroquin, id quod satis superque constat, numi in urbe *Wâsitæ*, quæ anno 84 [703] prope Tigridem condita est (cfr Ritter, Erdkunde, Th. X p. 188), a Khalifis umajjadicis cusi in terris septentrionalibus valde frequentes inveniuntur. Museum regium jam sequentes exhibet annos: 86, 87?, 88, 92, 93, 95, 96, 98, 99, 106, 107, 112, 116, 117, 120—126, 128—130. Numophylacium upsaliense annis 118 et 127 seriem quodammodo explet.

---

## II. ABBASIDICI.

### El-Mu'tasim-billâh Khalifa.

3. Vid. Tab. I fig. 3. Numus perforatus, contusus, diruptus pauca modo legenda servat.

A. I. cum N:o 1 communis.

In margine interiore: - - بسم الله ضرب هذا الدرهم بالرا - تين - *Nomine Dei. Cusus est hic dirhem in el-Ráfiqa* anno *ducentesimo* et vigesimo —

In margine exteriore: - الامر م - ومن بعد ويوميذ - Dei

erat *antea et post erit imperium. Illo autem die* auxilio divino fideles lætabuntur. (Coran. 30, 3, 4.)

| | | |
|---|---|---|
| A. II. | محمد | *Muhammed* |
| | رسول | *legatus* |
| | الله | *Dei.* |
| | المعتصم بالله | *El-Mu'tasim*-billâh |

In margine modo كره exstat; cfr. N:o 1; cetera evanuerunt.

Nihil dubii mihi jam superest, quin hic dirhem in urbe *el-Râfiqæ* sit cusus. Eam, in Mesopotamia ad Euphratem fluvium sitam, alii eandem ac *el-Raqqam* habent, alii ipsius suburbium faciunt (vid. Ritter, Erdkunde, Th. X, p. 1139 sq.). In numis vero utrumque nomen, eodem fere tempore, non raro occurrit, et museum regium duos possidet Abbasidicos, annis 179 [795] et 199 [814, 5] el-Raqqæ cusos, novem autem, præter hunc, el-Râfiqæ, qui annos exhibent hos: 183 [799], 188 [803, 4], 191 [806, 7], 192 [807, 8], 193 [808, 9], 296 [908, 9], 327 [938, 9] et 356, id quod satis superque probat, utramque urbem certe sæculo secundo exeunte alteram ab altera separatam fuisse. Diu mihi dubitanti, utrum in hoc numo recte legerim el-Râfiqæ, quum ceteri Abbasidici a me antea examinati, qui ibidem cusi erant, margine carerent exteriore in A. I, neque ultra annum 193 procederent, recentissimus autem anno 356 fabricatus hamdanidicæ dynastiæ originem debe-

ret, duo novi allati sunt, quorum alter anno 296, imperante el-Muqtedir-billâh Khalifa, alter anno 327 in hac urbe erat procusus. Itaque serie annorum nimio intervallo abrupta quodammodo restituta, el-Râfiqam per sæculum tertium urbem fuisse monetalem pro certo habeo et vere in præsente dirhemo occurrere.

Qui ultimus a me citabatur numus tam insolitus mihi visus est, ut non possem non, quin eum delineatum (Tab. I fig. 4) jam describerem. Anno 1840 una cum multis anglosaxonicis tribusque Samanidarum numis in insula Gothlandiæ repertus, in museo regio nunc servatur.

A. I. لا اله الا الله وحده لا شريك له ابو الفضل بن امير المومنين

*Non est Deus nisi*
*Alláh unicus,*
*cui non est socius.*
*Abu-l-Fadhl filius*
*imperatoris fidelium.*

In margine interiore: - - ضرب بالرافقة سنة سبع - dir*hem* *el-Ráfiqæ anno* trecentesimo et vigesimo *septimo* [938, 9].

In margine exteriore: - ضرب يومئذ د -

A. II. لله محمد رسول

*Deo!*
*Muhammed*
*legatus*

الله *Dei.*

الراضى بالله *El-Râdhi-billâh*

In margine: - بهدى ودين الحق ليظهره على -

Quum el-Râdhi-billâh post khalifatum anno 322 susceptum, anno 329 diem obiret supremum, facile apparet, hunc dirhemum anno 337 esse procusum. Jam ante hoc tempus Mesopotamia Hamdanidis paruit (cfr. Abulfedæ Annales, II, p. 398), quare fieri potest, ut ab iis præsens numus profectus sit. De *Abu-l-Fadhlo*, qui hic filius el-Râdhii appellatur, nihil mihi innotuit. Inter rarissimos numos hic sane habendus est. Alius in regio museo adest, ab Hallenbergio (l. c. I. p. 167) citatus, qui Wâsitæ anno 32* cusus, easdem ac hic exhibet inscriptiones.

## El-Muqtedir-billâh Khalifa.

4. Numus valde detritus.

A. I. p. p. العباس بن - Abu-*l-Abbâs filius*

المومنين - imperatoris *fidelium.*

In margine interiore: بسم الله ضرب هذا - - هم وثلثماية - - البصر - *Nomine Dei. Cusus est hic* dirhem *el-Basræ* anno *trecentesimo* -

In margine exteriore verba solita e Corani 30, 3, 4 insunt.

A. II. p. p. ut in N:o 3 المقتدر بالله *El-Muqtedir-billâh.*

In margine verba Coran. 9, 33.

*El-Basra*, urbs Mesopotamiæ nobilis (vid. Ritter l. l. Th. XI, p. 1032), plus quinquaginta numos, inter annos 81—337 fabricatos in museum contulit, inter quos similis omnino huic inest, qui, prope Eskilstunam, Sudermanniæ oppidum, repertus, anno 313 cusus est. Spatium, quod in margine præsentis numi inter urbis nomen numerumque centenarium vacuum manet, monadem solum admittere potest, quare eum inter annos 301-310 procusum habeas.

*Abu-l-Abbâs* est Ahmed Abu-l-Abbâs, filius el-Muqtedir-billâh, qui postea nomine Râdhi-billâh insignitus sceptra capessivit.

## El-Qâhir-billâh Khalifa.

5. Numus satis bene conservatus.

A. I. p. p. ابو القاسم بن امير المومنين *Abu-l-Qâsim filius imperatoris fidelium.*

In margine interiori: بسم الله ضرب هذا الدرهم بمدينة السلام سنة اثنين وعشرين *Nomine Dei. Cusus est hic dirhem in urbe salutis (Baghdâdi) anno trecentesimo secundo* (933).

In margine exteriore: - الامر من - بعد ويوميذ يفرح المومن -

A. II. p. p. القاهر بالله *El-Qâhir-billâh.*

In margine verba solita leguntur.

Dirhemi El-Qâhiri, qui per duos modo annos (320-322) imperium tenebat, apud nos rariores sunt, nec, præter hunc, nisi duo in museo regio exstant, alter in Urbe salutis anno 320, alter Wâsitæ anno 321 cusus [1], uterque iisdem ac præsens titulis insignis.

*Abu-l-Qâsim* cujus nomen in A. I. conspicitur, fuit Abu-l-Qâsim Abd-Allâh, filius El-Qâhiri, qui, anno 332 [943, 4] ipse in dignitatem Khalifatus evectus, nomen El-Mustekfi-billâh recepit.

Hic observandum est, numos Abbasidarum, quarto Hedjræ sæculo cusos, ante in Suecia rarissimos, his postremis temporibus frequentiores esse factos, et museum regium eorum numerum non exiguum possidere, inter quos multi obveniunt admodum notabiles.

## III. SASSANIDICUS.

6. Vid. Tab. I. fig. 5.

A. I pone regis imaginem *Afzûd* i. e. vigeat, litteris pehlevicis exstat, iisdemque ante faciem scriptum est *Khusrub* i. e. *Khosrew*, nomen regis Sassanidici adhuc ignoti.

1) Collectio Hallenbergii, quæ jam numophylacio acad. upsaliensis inserta est, dirhemum asservat el-Qâhiri anno 321 in Urbe salutis procusum, cujus mentio facta est in "Numism. Oriental." I p. 163.

A. II ad sinistram altaris partem annus, quo cusus est numus, sine dubio conspicitur, at tam confuse expressus, ut conjiciendo eum assequi nequeam. Ad dextram nota monetaria, in aliis ejusdem generis dirhemis sæpius obvia. Nullum litteræ cuficæ vestigium apparet.

Cum cel. Olshausenio (die Pehlewi-legenden etc. p. 66 sqq.) ad ultimam gentis sassanidicæ ætatem referendus est.

---

## IV. TAHIRIDICI.

### Abd-Allâh.

7. Numus perforatus.

A. I. ut in N:o 1.

In margine interiore: بسم الله ضرب هذا الدرهم بمدينة بهان سنة اربع عشرين ومايتين - *Nomine Dei. Cusus est hic dirhem in urbe* Isbahân *anno ducentesimo vigesimo quarto* [836, 7].

In margine exteriore inscriptio inest communis.

A. II. p. p. المعتصم بالله *El-Mu'tasim-billâh.*

In margine eadem ac in N:o 1 leguntur Corani verba.

In hoc dirhemo foramen medium urbis nomen perrupit; satis tamen litterarum remansit, ut *Isbahân* facile legere possis. Isbahân, quemadmodum Arabes Ispahan pronuntiant, urbs

Persidis clarissima (cfr. de ea Ritter l. l. Th. IX p. 40 sqq.) præcipue in numis tahiridicis occurrit.

In Suecia hæc classis pauca solummodo specimina suæ monetæ exhibuerat, donec anno 1844, inter 1154 dirhemos, qui unâ in insula Gothlandiæ reperti sunt, tantum tahiridicorum colligerem numerum, ut ii maximam fere collectionis partem efficerent. Exceptis enim plus 400, quorum tituli plus minusve oblitterati annum et locum, quo essent fabricati, non exhibebant, dynastiam vero, ad quam referrentur, tahiridicam satis perspicue ostendebant, 340 alios ejusdem classis bene distinguere ac determinare mihi licuit, quibus classis hæc in museo antea pauperrima mirificum in modum aucta est. De illa eximia collectione separatim agere mecum constitui.

8. Vid. Tab. I. fig. 6.

A. I. = N:o 1.

In margine interiore: بسم الله ضرب هذا الدرهم بهمد ـ ـ ـ ـ خمس و ـ ين ومايتين *Nomine Dei. Cusus est hic dirhem in Hamedân anno ducentesimo et vigesimo quinto* [839, 40].

In margine exteriore hæc supersunt: ـ ـ الامر ويوميذ ـ يفرح المومن ـ بنصر ـ

A. II. p. p. ـ م بالله El-Mu'tas*im*-*billâh*.

In margine eadem ac in N:o 1.

Numus, ut videtur, inter cudendum loco dimotus, vel postea vi diruptus, ita ut rima prope anni locum eum permearet, ceteroquin valde detritus haud parum difficultatis interpreti offert. Si recte video, hîc urbs *Hamedânæ* proprio suo nomine primum conspicitur, quæ antea appellatione sola *Mâhi* in dirhemis obvia fuit. De litteris, quæ etiamnunc bene hîc legi possunt, nihil dubii mihi superest. Primo quidem intuitu بمصر i. e. *in Misr* (Fostât) me legere putavi [1]. At litterarum ductus et spatium, quod inter annum urbisque nomen mutilatum apparet, diligentius examinans statim vidi, rem aliter sese habere. Prima enim vocis, quam Hamedân jam legerim, littera, superne sinistrorsum paullulum inclinata, eandem præ se fert speriem ac ه in vocabulo الدرهم proxime præcedenti. Quod si post الدرهم legendum esset بمصر, littera م finalis sursum versus esset inclinata, quæ tamen forma in ceteris ejusdem generis litteris in hoc numo non occurrit. Eandem ob caussam fieri non potest, ut hoc loco بمدينة *in urbe* legas, putans nomen urbis, post ponendum, esse deletum. Spatium enim jam vacuum tam breve est ut, voce سنة scripta, non nisi duas capiat litteras. Jure igitur quodam ب, ه, م, د hîc legere posse mihi videor, quibus si ا et ن addidero, non merito arduæ conjecturæ accusabor.

Et sane mirum semper mihi visum est, tantam urbem, quanta per longam annorum seriem fuerit *Hamedân* (de qua cfr. Ritter, l. l.

---

1) In alio musei regii numo, qui anno 1844 in Gothlandiæ insula effossus et nomine *El-Mu'tasim-billâh* Khalifæ notatus est, بمصر vere legitur. Annus vero oblitteratus est.

Th. IX, p. 74 sqq.), in dirhemis suo nomine non obvenire, quamvis, ut alios taceam, Abu-Ishâq Fârcsi, qui certe ante annum Hedjræ 309 [921, 2] *Librum climatum* scripsit, eam hac appellatione semper nuncuparet. Objiciatur fortasse huic sententiæ, multas esse urbes, inprimis provinciarum persicarum, quæ in numis plerumque, quæque in suæ provinciæ nomine latent, et, si Mâhi eadem fuerit ac Media, rem maxime vulgarem in moneta cufica fuisse, pro capite terræ provinciam modo ponere. At observent velint, qui ita argumententur, in re numaria Muhammedanorum, quamquam provinciæ nomen sit usitatius, urbem tamen primariam etiam numis imprimi, neque raro accidere, ut idem locus duobus modis diversis designetur. Cujus utriusque rei exempla sunto Taberistân et Amol, Sedjestân et Zerendj, Djei et Isbahân, Rej et El-Muhammedia, Aberschehr et Nîsabûr e. s. p.

Si vera est mea opinio, numus præsens rarissimus, nisi unicus, habendus.

9. Numus satis bene conservatus.

A. I. = N:o 1.

In margine interiore : بسم الله ضرب هذا الدرهم بالمحمدية سنة ست وعشرين ومايتين *Nomine Dei. Cusus est hic dirhem el-Muhammediæ anno ducentesimo et vigesimo sexto* [840].

In margine exteriore solita occurrunt verba.

A. II. المعتصم بالله *El-Mu'tasim-billâh.*

In margine = N:o 1.

*El-Muhammedia*, ut El-Mehdi Khalifa urbem antiquam Irâcæ persicæ, *Rej* olim vocatam, a se amplificatam nominavit (cfr. Ritter, l. l. Th. VIII p. 599), in dirhemis, inde ab anno 148 usque ad annum 341 cusis, in museo regio sæpissime conspicitur. Hic tamen inter rarissimos est collocandus, cujus unicum tantum exemplar in Suecia antea repertum est, in quo autem A. II plane oblitterata erat.

---

## V. SAMANIDICI.

### Ismaîl ben-Ahmed.

10—13. Ut proxime sequentes usque ad numerum 33, sic hi quatuor nihil singulare habent et summis modo lineis a me describentur.

Tres eorum in *El-Schâsch* s. *Taschkend*, urbe Transoxanæ s. Mavaralnahri celebri, annis 285 [898], 287 [900] et 290 [902, 3] fabricati sunt, reliquus autem *Samerqandæ*, quæ caput erat ejusdem regionis notissimum, anno 286 [899] cusus est.

### Ahmed ben-Ismaîl.

14—19. Quatuor in *El-Schâsch*, annis 291 [903, 4], 292 [904, 5], 294 [906, 7] et 297 [909, 10], ceteri autem duo *Samerqandæ*, annis 297 et 300 [912, 3] procusi sunt.

### Nasr ben-Ahmed.

20—32. Horum quatuor in *El-Schâsch*, annis 314

[926, 7], 315 [927, 8], 316 [928, 9] et 317 [929], quinque vero *Samerqandæ*, annis 304 [916, 7], 310 [922, 3], 311 [923, 4], 315 et 323 [934, 5] signati sunt. Reliqui quatuor, formæ et speciei minus usitatæ, nomen solum regis samanidici certo exhibuerunt; cetera sunt oblitterata.

### Nûh ben-Nasr.

33. Fragmentum numi est parvum, quod in A. I. اربعين وثلثماية i. e. anno *trecentesimo et quadragesimo*, et in A. II. نصر ـ i. e. Nûh ben-*Nasr* ostendit. Circa annum 340 [951, 2] igitur a Nûho ben-Nasr cusum esse hunc dirhemum, facillime apparet.

### Mansûr ben-Nûh.

34. A. I. = N:o 1; supra apparet فايق *Fâjeq*.

In margine interiore: ـ ببخارا سنة ـ *Bukhâræ anno*; cetera evanuerunt.

Margo exterior litteras quasdam inscriptionis solitæ ostendit.

A. II. p. p. المطيع لله *El-Mutía'-lilláh.*

منصور بن نوح *Mansúr filius Núhi.*

In margine = N:o 1.

Numus rarus, quo adhuc caruit museum. Urbs *Bukhára* notissima inde ab anno 194 in dirhemis, qui in Suecia reperti sunt, quamquam rarius, obvia est.

*Fajeq*, cujus nomen in A. I. apparet, a mancipio, ut in Oriente sæpissime accidere solet, in summam evectus est po-

testatem, id quod numi satis superque demonstrant, quibus nomen ejus, utpote qui monetæ esset præfectus, impressum est. Si idem est, de quo Abulfeda (Annales, II, p. 580 et 600) loquitur, postea in Nûhum ben-Mansûr dominum suum conspirans, anno 384 [994] proelio victus cecidit. Cfr. Frœhnii, Novæ symbolæ etc., p. 17.

35. Fragmentum.

A. I. p. p. infra legitur litteris minutis بن حرب

In margine interiore: ـ باندرابة سنة ست ـ *Enderâbæ anno* trecentesimo et quinquagesimo *sexto* [966, 7].

A. II. p. p. منصور بن نوح *Mansûr filius Núhi.*

Dirhemus rarus, qui adhuc in museo desiderabatur. Urbs *Enderâba*, quæ inde ab anno 264 in numis nostris frequens est, inter Balkh et Ghasnam sita, diligentius a Frœhnio (Novæ symbolæ p. 67) descripta est.

Similem subscriptionem in A. I. alius numus Mansûri habet, qui in Frœhnii recensione p. 583, N:o 315 e editus est, ad quem lectorem ablegatum velim.

36. Fragmentum, in quo hæc modo supersunt:

A. I. supra ا ـ ـ; infra ن

A. II. المطيع لله *El-Mutía'-lillâh.*

منصور *Mansûr*

بن نوح *filius Núhi.*

Quæ in A. I. exstat littera ا, eam ultimam habeo vocis بغرا, in hujus dynastæ dirhemis non raro obviæ. Quis hic *Boghra* sit, nondum certo innotuit. Ductus, qui in infima parte numi apparet, litteram ر esse puto, et ultimam tituli الملك المظفر *rex victor*, quo Mansûr sese ornabat. Fortasse ætate proxime præcedente prior est. Cfr. Fræhn l. l. p. 66.

Non prætercundum est, dirhemos Samanidarum, ut in aliis, quæ e nostra terra effodiuntur, numorum orientalium collectionibus, sic in hac etiam, longe maximam efficere partem. Cujus rei caussam vero simillimam in eo inesse putamus, quod via commercii inter regiones boreales atque Orientem per terras Transoxanæ, Samanidis subjectas, et deinde per mare Caspicum et sic porro iret. Omnium igitur dirhemorum, quos museum regium servat, fere quinque sextantes hujus sunt classis.

---

## VI. ZIJARIDICUS.

### Bistûn.

37. Vid. Tab. I Fig. 7. Numus duobus foraminibus læsus.

| | |
|---|---|
| A. I. لا اله الا | *Non est Deus nisi* |
| الله وحده | *Alláh unicus*, |
| لا شريك له | *cui non est socius.* |
| الطايع لله | *El-Tâi'-lilláh.* |

In margine interiore: ـ هذا الدرهم باستراباذ سنة ست وستين وثلثماية - *hic dirhem in Esterábádh anno trecentesimo et sexagesimo sexto* [976, 7].

In margine exteriore: - قبل ومن بعد ويوميذ يفرح المومنون -

A. II. لله *Deo!*

محمد رسول الله *Muhammed legatus Dei.*

ركن الدولة ابو على *Rukn-el-daula Abu-Ali.*

ظهير الدوله *Thahír-el-daula*

ابو منصور *Abu-Mansúr*

وشمكير (sc. filius) *Waschmegîri.*

In margine: ـ ل الله ارسله بالهدى ودين الحق ليظهره على الدين كله ولو كر ـ

Dirhem rarissimus, nec antea, quoad scio, apud nos in Suecia inventus, neque ab ullo adhuc editus.

*Zijaridæ*, qui a *Zijâro*, patre Merdawidji et Waschmegîri, nomen et originem deducunt, a rerum orientalium scriptoribus jam Merdawidjidæ jam Waschmegiridæ etiam appellantur. Sæculis post Hedjram quarto et quinto in Djurdjân, Taberistân provinciisque, quæ his adjacent, supremam exercuerunt potestatem. Anno 356 [966] vel, ut alii malunt, 357 (vid. Abulfedæ annales, II, p. 488) *Bistûn*, tertius ex hac gente princeps, *Waschmegîro* patri successit. Ab hoc igitur rege, cui honoris titulus *Thahîr-el-daula* i. e. opitulator regni, et cognomen *Abu-Mansûr* erat, hic numus procusus est [cfr.

Fræhn, kleine Abhandl. Leipz. 1839, p. 157]. In A. II. nomen etiam conspicitur *Rukn-el-daulæ Abu-Alü*, qui ordine secundus e gente Buwejhidica princeps, hoc ipso anno 366 mortuus est (cfr. *Ibn-Khallikân*, ed. *de Slane* p. ٣٠٨, Mirchonds, Gesch. d. Sultane aus d. Geschl. Bujeh, ed. *Wilken*, p. 18 sq.) Qua ex re concludere possumus, Zijaridas summam Buwejhidarum agnovisse auctoritatem. Cfr. *Ibn-Khallikân* in vita *Qabûsi*, l. l. p. ٥٩٣

*Esterâbâdh* urbs, quæ haud procul a mari caspico jacet (vid. Ritter, l. l. Th. VIII, p. 514 sqq.), rarissime in dirhemis apparet.

---

## VII. BUWEJHIDICUS.

### Ali ben-Buwejh.

38. A. I. p. p. علی بن بویة *Ali filius Buwejhi.*

In margine interiore: بسم الله ضرب هذا الدرهم بشیراز سنة ثلث وثلثین ثلثمایة *Nomine Dei. Cusus est hic dirhem in Schiráz anno trecentesimo et trigesimo tertio* [944].

In margine exteriore sollennis enest ipigraphe.

A. II. p. p. المتقی لله *El-Muttaqi-lillâh.*

In margine = N:o 1.

Alterum hujus exemplar in collectione musei veteri asservatur (vid. Hallenberg, Numism. Orient. P. I. p. 169).

*Ali-ben-Buwejh*, cognomine Imâd-el-daula notus, qui imperium suæ gentis condiderat, inde ab anno 322 [933, 4] usque ad annum 339 [950, 1] regnavit. Cfr. Mirchond, l. l. p. 16, Ibn-Khallikân, l. l. p. ٥٠٦

*Schirâz*, urbs Persidis notissima, de qua consulas Ritter, l. l. Th. VIII, p. 847 sqq., jam in novem musei dirhemis legitur.

---

## VIII. HAMDANIDICI.

### Abu-Muhammed et Abu-l-Hasan.

39. Vid. Tab I fig. 8, in qua ٦ ex urbis nomine reliquum, ut pote quod fere oblitteratum esset, prætermisit delineans.

| | | |
|---|---|---|
| A. I. | لا اله الا | *Non est Deus nisi* |
| | الله وحده | *Allâh unicus,* |
| | لا شريك له | *cui non est socius.* |
| | ابو منصور بن | *Abu-Mansûr filius* |
| | امير المومنين | *imperatoris fidelium* |
| | سيف ـ | *Seif*-el-daula |
| | — — — | Abu-l-Hasan. |

In margine interiore: بسم الله ضرب هذا - - لا - سنة ثلثين - *Nomine Dei. Cusus est hic* — in urbe sa*l*utis (Baghdâdi) *anno* trecentesimo et *trigesimo* [941].

In margine exteriore: - - فرح المومنون - - - لامر من ة

A. H. محمد *Muhammed*

رسول الله *legatus Dei.*

المتقى لله *El-Muttaqi-lillâh.*

ناصر الدولة *Nâsir-el-daula*

ابو محـ — *Abu-Muh*ammed.

In margine: - - الدين كله ولو - - ل الله ارسله بالهد -

*Hamdanidæ*, quorum potentia a fratribus Abu-Muhammede el-Hasano et Abu-l-Hasano A'lio, filiis Abi-l-Hejdjâi Abd-Allâhi ben-Hamdân, initium cepit, per majorem quarti post Hedjram sæculi in urbibus el-Mausil (Mosul) atque Haleb imperarunt. Ipso eo anno, quo hic dirhem fabricabatur, ut ex narratione Ibn-Khallikâni patet (ed. *de Slane* p. ٣٠٧), el-Muttaqi-lillâh Khalifa, ut gratiam ob auxilium sibi contra Ibn-el-Berîdi latum quodammodo agnosceret, Abu-Muhammedem titulo *Nâsir-el-daulæ* s. regni liberatoris, Abu-l-Hasanum vero *Seif-el-daulæ* s. ensis regni ornavit, aliis insuper additis benevoli animi documentis. Cfr. Abulfedæ, annales, II p. 416 sq. Utriusque fratris vitas scripsit Ibn-Khallikân, illius, qui anno 358 [968, 9] mortuus est, loco jam citato, et hujus, qui anno 356 [966, 7] diem obiit supremum, p. ٥٠٧

Numi hujus dynastiæ rarissimi, præcipue in Suecia, sunt,

**neque, his exceptis, in regio museo nisi quinque adsunt, et unus in numophylacio academiæ upsaliensis.**

40, 41. Vid. Tab. I, fig. 9. Geminum exemplar, alterum duobus foraminibus perruptum, alterius particula præcisa est.

| | | |
|---|---|---|
| A. I. | لا اله الا الله | *Non est Deus nisi Allâh* |
| | وحده لا شريك له | *unicus, cui non est socius.* |
| | ابو منصو ر بن | *Abu-Mansúr filius* |
| | امير المومنين | *imperatoris fidelium.* |
| | سيف الدولة | *Seif-el-daula* |
| | ابو الحسن | *Abu-l-Hasan.* |

**In margine interiore:** بسم الله ضرب هذا الدرم بمدينة السلام سنة احدى وثلثين وثلثماية *Nomine Dei. Cusus est hic dirhem in urbe salutis (Baghdâdi) anno trecentesimo et trigesimo primo* [942].

**In margine exteriore solita est inscriptio.**

| | | |
|---|---|---|
| A. II. | لله | *Deo* |
| | محمد رسول الله | *Muhammed legatus est Dei,* |
| | صلى الله عليه | *cui Deus benedicat.* |
| | المتقى لله | *El-Muttaqi-lillâh.* |
| | ناصر الدولة | *Nâsir-el-daula* |
| | ابو محمد | *Abu-Muhammed* |

**In margine = N:o 1.**

Huic similis e collectione hallenbergiana in numophylacium acad. upsaliensis illatus est, anno eodem el-Kûfæ cusus.

Alius ejusdem generis, qui, anno 1840 in Gothlandia repertus, e regio museo nuper mihi advenit, notabilior est, quam ut occasionem ejus edendi prætermittam. Vid. Tab. I N:o 10.

| | | |
|---|---|---|
| A. I. | لا اله الا | *Non est Deus nisi* |
| | الله وحده | *Alláh unicus,* |
| | لا شريك له | *cui non est socius.* |
| | سيف الدولة | *Seif-el-daula* |
| | ابو الحسن | *Abu-l-Hasan.* |

In margine interiore: ضرب هذا الدرهم بميفرقين سنة - - اربع وخمسين وثلثة - *Cusus est hic dirhem in Miafareqín anno trecentesimo et quinquagesimo quarto* [964].

In margine exteriore: ـ مر قبل وبعد و - - ح - المومنون بنصه Observandum est vocis من ante قبل et بعد vestigium non apparere.

| | | |
|---|---|---|
| A. II. | لله | *Deo!* |
| | محمد رسول الله | *Muhammed est legatus Dei,* |
| | صلى الله عليه | *cui Deus benedicat* |
| | وعلى اله المطيع | *una cum familia sua. El-Muti'a-* |
| | لله ناصر الدولة | *lilláh. Násir-el-daula* |

ابو محمد *Abu-Muhammed*

In margine exstat: محمد رس - - ليهدى ودين الحق
ليظهره — ولو كره المشركون Verba hìc prætermissa sunt.

In A. II. formula benedicendi solita ab ea, quæ in prioribus Hamdanidarum dirhemis conspicitur, in eo discrepat, quod verba وعلى اله addita sunt, quibus satis aperte dynasta indicavit, se opinionibus favere Schiitarum. Neque id mirum. Post Ægyptum a Fatemidis occupatam, vicini reges et principes omnia ab his metuebant fanaticis, qui imperium suum in Asiam, Khalifarum antiquam sedem, proferre omni vi studuerunt. Ut amicitiam igitur horum sibi conciliarent Hamdanidæ et postea Merwanidæ, levissima formulæ solitæ mutatione, suam in Alidarum partes inclinationem publice manifestarunt.

Urbs *Miafareqîn*, quæ postea Merwanidis paruit, ad ramum Tigridis superiorem sita, sepulchro Seif-el-daulæ diu celebris fuit. Vid. Ritter, l. l. Th. XI, p. 67 sqq. Diversus scribendi modus hic observandus est; alias post ف semper ſ addi solet; cfr. N:o 46.

---

## IX. IKHSCHIDIDICUS.

### Muhammed El-Ikhschîd.

42. Vid. Tab. II, fig 1.

A. I. لا اله الا *Non est Deus, nisi*
الله وحده *Alláh unicus*

لا شريك له *cui non est socius.*
ابو منصو ر بن *Abu-Mansúr filius*
امير المومنين *imperatoris fidelium.*

**In margine interiore:** بسم الله ضرب هـذا الدرهم بـدم ـ نة ثلث وثلثين وثلثماية ـ *Nomine Dei. Cusus est hic dirhem in* ***Dim*****eschq (Damasci)** *anno trecentesimo et trigesimo tertio* **[941, 2].**

**In margine exteriore supersunt:** ـ ومن بعـد ويوم ـ غـرج المومنـ ـ

**A. II.** لله *Deo!*
محمد رسول الله *Muhammed est legatus Dei,*
صلى الله عليه *cui Deus benedicat.*
المتقى لله *El-Muttaqi-lilláh*
امير المومنين *princeps fidelium.*
الاخشيد *El-Ikhschíd.*

**In margine:** ـ ول الله ارسله بالهدى ـ لحـق ليظهره عـلى الدين كله ولو كره الم ـ

**Numus est rarissimus et unicus in Suecia adhuc repertus.**

**Dynastia Ikhschididarum, quæ post triginta quatuor annorum regnum in Syria et Ægypto, anno denique 350 [968, 9] per Djevherum, ducem Muezz-lidîn-Allâhi khalifæ fatimidici, eversa est, ab *Abu-Bekro Muhammede ben-Taghadj El-Ikhschíd***

nomen et originem deduxit. Hic enim anno 318 [930] ab El-Muqtediro Khalifa Syriæ præfectus, anno 323 [934, 5] Ægyptum etiam a Qâhir-billâho accepit provinciam. Ibn-Khallikân (ed. *Wüstenfeld*, N:o ٧..), qui diligentius vitam ejus descripsit, narrat, El-Râdhi-billâhum Khalifam anno demum 327 [938, 9] eum nomine *El-Ikhschîd* ornasse, utpote quod titulus esset regum Ferghânæ, a quibus Muhammed ille origines suas repetitas vellet. Anno 334 [945, 6] Damasci mortuus est. Cfr. etiam Abulfedæ annales, II, p. 392 et 418.

Ex hac urbe duodecim jam possidet regium museum dirhemos, annis 79, 80, 89, 126, 127, 128 (ineditum), 187, 209, 213, 214, 224 et 339 et numophylacium upsaliense quatuor annis 82, 86, 99 et 105 cusos.

---

## X. OQAILIDICI.

### Abu-Hassân Muqallid Husâm-el-daula.

43. Vid. Tab. II, fig. 2. fragmentum.

A. I. وحده لا شريك له *unicus, cui non est socius.*

الملك بها الدولة *Rex Behâ-el-daula.*

حسام الدولة *Husâm-el-daula.*

ابو حسان *Abu-Hassân.*

Infra ـح exstat.

In margine interiore: ـه ـ صل سنة ا ـ dir*hem* in el-Maus*il* (Mosul) *anno*

Ex margine exteriore littera د sola superest.

Infra sigla est ـح

A. H. الله عليه ـ *Deus ei* benedicat,

سلم تسليما ـ *et salutem reddat integram.*

القادر بالله *El-Qâdir-billâh.*

Ex margine restat ارسله

Abu-l-Duwâd Muhammed ben-el-Musejjib [1], arabs Emirus tribus Oqail dictæ, anno 380 [990] El-Mausilo potitus, fundamentum suæ stirpis imperii jecit et filia Behâ-el-daulæ, regi Buwejhidico, in matrimonium data regnum conditum sibi confirmavit. Huic anno 387 [997, 8] vel secundum alios 386 [996, 7] mortuo frater *Abu-Hassân El-Muqallid* successit, qui usque ad annum 391 [1000, 1], quo a servo turca Anbâri occisus periit, sceptra tenuit. *Husâm-el-daulæ* (i. e. gladius imperii) titulo insignis, potestatem Buwejhidarum agnovit supremam, eamque ob caussam nomen quoque Beha-el-daulæ (qui

1) Hujus emiri numi nondum mihi innotuerunt. In paroecia Wahlbo Gestriciæ tamen nuper dirhem inventus est, in quo, lectu difficillimo, nomen ابو الدواد et الموصل perspicue legere mihi videor.

anno 403 [1012, 3] mortuus est) numis impressit. Historiam dynastiæ breviorem Ibn-Khallikân in vita hujus Husâm-el-daulæ (ed. *Wüstenfeld*, N:o ٧٤٥) exposuit. Cfr. Abulfedæ annales, II, p. 572 et 604.

Urbs *El-Mausil*, hodie Mosul dicta (vid. Ritter, l. l. Th. XI p. 171 sq.), in octo modo musei dirhemis apparet.

44. Vid. Tab. II fig. 3. Numus perforatus.

| | | |
|---|---|---|
| A. I. | لا اله الا الله | *Non est Deus nisi Alláh* |
| | وحده لا شريك له | *unicus, cui non est socius.* |
| | الملك بها الدولة | *Rex Behá-el-daula.* |
| | حسام الدولة | *Husám-el-daula* |
| | ابو حسان | *Abu-Hassán.* |

Supra ء infra ح

In margine interiore: بسم الله ضرب هـذا ـ ﷺ بالموصل سنة ـ وثمانين وثلثماية *Nomine Dei. Cusus est hic* dirhem *in El-Mausil anno trecentesimo et octogesimo* —

Margo exterior fere omnino detritus est.

| | | |
|---|---|---|
| A. I. | لله | *Deo!* |
| | محمد | *Muhammed est* |
| | رسول الله | *legatus Dei,* |

صلى الله عليه *cui Deus benedicat.*
القادر بالله *El-Qâdir-billâh.*

**Infra** ح

**In margine:** ـ ه بالهدى ودين الحق ليظهره على الدين كله ولو ـ

45. Vid. Tab. II fig. 4. Numus perforatus et valde detritus.

**A. I** لا اله الا الله *Non est Deus nisi Allâh.*
الملك بها الدولة *Rex Behâ-el-daula.*
جناح الدولة *Djennâh-el-daula*
ابو الحسن *Abu-l-Hasan.*

**Supra** ء **infra** ح

**In margine interiore:** ـ بالموصل سنة ـ وثلثة ـ *in El-Mausil anno trecentesimo —*

**Margo exterior præcisus est.**

**A. II.** لله *Deo!*
محمد رسول الله *Muhammed est legatus Dei.*
القادر بالله *El-Qâdir-billâh.*
حسام الدولة *Husâm-el-daula*
ابو حسان *Abu-Hassân.*

**Infra** ح

**E margine supersunt** ـ هره على الد ـ

**Dirhem est rarissimus et notabilissimus. Ibn-Khallikân l. l. fratrem Muqalledi** ***Abu-l-Hasanum*** **appellat, qui fortasse titulo** ***Djennâh-el-daula*** **i. e. ala s. brachium imperii ornatus est.**

## XI. MERWANIDICI.

### Abu-Ali El-Hasan.

46. Vid. Tab. II fig. 5.

| | | |
|---|---|---|
| A. I. | لا اله الا الله | *Non est Deus nisi Allâh* |
| | وحده لا شريك له | *unicus, cui non est socius.* |
| | الملك بها الدولة | *Rex Behâ-el-daula* |
| | قطب الملة | *Qotb-el-Milla.* |

Supra vox الامير *Emirus* litteris minutis conspicitur.

In margine interiore: درهم بميفارقين سنة ثلث وثمنين — وثلثماية *dirhem in Miafâreqîn anno trecentesimo et octogesimo tertio* [993, 4].

Margo exterior plane evanuit.

| | | |
|---|---|---|
| A. II. | لله | *Deo* |
| | محمد رسول الله | *Muhammed legatus est Dei,* |
| | صلى الله عليه واله | *cui Deus benedicat una cum ejus familia.* |
| | القادر بالله | *El-Qâdir-billâh.* |
| | الحسن بن مروان | *El-Hasan filius Merwani.* |

In margine modo رسول superest.

*Merwanidæ*, genere Curdi, qui anno 380 terram Dijâr-Bekri occupaverant, varia fortuna has regiones ac vicinas Armeniæ arces octoginta fere annos tenuerunt. Primus eorum rex fuit *Abu-Ali el-Hasan*, a quo hic numus procusus est. De

mutata benedictionis formula, quæ in omnibus Merwanidarum numis apparet, jam antea pauca locutus sum. Vid. Abulfedæ annales, II p. 568.

### Abu-Mansûr Mumehhid-el-daula.

47. Vid Tab. II fig. 6. Dimidia numi perforati pars.

A. I. لا اله — *Non est Deus* —

وحده لا — *unicus cui non* — .

الملك بها — *Rex Behâ*-el-daula

طب الملة — *Qotb-el-Milla.*

ابو نصر *Abu Nasr.*

Infra est حرره; quid sit, haud assequor.

In margine interiore: بميافارقين *in Miafâreqîn* tantum superest.

Margo exterior plane præcisus est.

A. II. لله *Deo!*

محمد رسول الله *Muhammed est legatus Dei*,

صلى الله عليه واله *cui Deus benedicat una cum ejus familia.*

القادر بالله *El-Qâdir-billâh*

الامير — *Emirus* Abu-Mansûr.

Margo præcisus est.

*Abu-Mansûr Sa'îd* vel, ut Ibn-Khallikân (in vita Abu-Nasri, qui frater hujus erat, ed. *de Slane* p. ٨٣), at contra numos, cum vocat, *Abu Sa'îd Mansûr*, *Mumehhid-el-daula* i. e. regni concinnator appellatus, post fratrem Abu-Alium, anno 387 [997] occisum, usque ad annum 401 [1010, 1] in imperio fuit. Ei

**successit tertius frater nomine *Abu-Nasr Ahmed*, Nasr-el-daula dictus, cujus nomen hîc in A. I scriptum est.**

48. Vid. Tab. II fig. 7. Tertia fere numi pars amissa est.

| | | |
|---|---|---|
| **A. I.** | لا اله الا الله | *Non est Deus nisi Allâh* |
| | وحده لا شريك له | *unicus, cui non est socius.* |
| | الملك بها الدولة | *Rex Behâ-el-daula* |
| | قطب الملة | *Qotb-el-Milla.* |
| | ابو نصر | *Abu-Nasr.* |

**In margine interiore:** بسم الله ضرب هـذا الـدرهم ـ ـ ثمانين وثلثماية *Nomine Dei. Cusus est hic dirhem* **anno** *trecentesimo et octogesimo* —

**Margo exterior detritus est.**

| | | |
|---|---|---|
| **A. I.** | لله | *Deo!* |
| | محمد رسول الله | *Muhammed est legatus Dei,* |
| | صلى الله عليه واله | *cui Deus benedicat, una cum ejus familia.* |
| | القادر بالله | *El-Qâdir-billâh.* |
| | ـ لامير ابو منصور | *Emirus Abu-Mansûr* |
| | ـ سعيد بن مروان | *Sa'îd filius Merwani.* |

**Margo præcisus.**

**Rarissimi sunt Merwanidarum dirhemi, et, his exceptis, duos modo, in musei regii collectione vetere asservatos, antea in Suecia offendi.**

# DOCTRINÆ SERIERUM INFINITARUM

## EXERCITATIONES.

AUCTORE

***EM. GABR. BJÖRLING.***

---

## PARS II:DA.

Probatâ jam in P. I:ma harum Exercitationum veritate æquationis illius

(I) . . . . . $(1+x)^y = 1 + y_1 x + y_2 x^2 + y_3 x^3 + \&c.$

omnibus

(1) . . . . . $\begin{cases} x = u(\mathrm{Cos}\, w + \sqrt{-1}\, \mathrm{Sin}\, w), \\ y = a(\mathrm{Cos}\, b + \sqrt{-1}\, \mathrm{Sin}\, b) = \mu + \nu\sqrt{-1}, \end{cases}$

$u$, $w$, $a$, $b$, $\mu$ et $\nu$ reales denotantibus quantitates, dummodo $u$ numerice $<1$ sit: tum breviter indicatis, quæ inde doctrinæ serierum infinitarum realium proficiscantur, emolumentis; nobis hoc tempore, ut quod in fine hujusce Part. I:mæ promisimus exsolvatur, injunctum est negotium ut iis, quæ ad hunc usque

diem de usu æquationis (I), dum $u$ numerice $=1$ est seu (quod idem valet) Mod. $x=1$, eademque profecto non omnia satis accurate probata fuerint, adjicienda nonnulla gravioris momenti vel potius totam hanc rem reficiendam curemus. —

## §. 1.

1. Quem in finem examinaturis omnium primo, quibus in casibus convergens sit divergensne series ipsa membri posterioris (I), dum Mod. $x=1$ seu dum $u$ numerice $=1$ est, duorum præcipuus nobis erit usus Theorematum horum:

### Theor. I.

Series termini generalis $f(n)$ positivi, ejusdemque ita comparati ut (crescente $n$ indefinite) $\lim \frac{f(n)}{f(n+1)} = 1$ sit, convergens erit aut divergens, prout, $n$ quodam ac quolibet majori, fuerit

$$(2) \quad \ldots\ldots\ldots \quad n\left[\frac{f(n)}{f(n+1)} - 1\right] > \text{aut} < 1,$$

seu q. i. v.

$$(2') \quad \ldots\ldots\ldots \quad \frac{nf(n)}{f(n+1)} - (n+1) \text{ positiva aut negativa.}$$

Revera jam pridem perbene notum est hoc Theorema, quippe quod nonnisi partem conficit præclari illius Theorema-

tis Celsi Bertrand *), eandemque talem cujus demonstrandi negotium suscipere l. cit. supersederit Bertrand verbis adjectis "nous n'en rapporterons pas la demonstration, qui a déjà paru dans ce Journal" **). Cui quamquam demonstrationi formam liceat reddi aliquanto simpliciorem; nos tamen, ne in re cognita ineptæ verbositatis rei judicemur, satius hoc tempore in verbis modo citatis Celsi Bertrand adquiescere putamus. —

Alterum hoc est novum

THEOR. II.

Si fuerit serici terminus generalis positivus $f(n)$ ita comparatus, ut $n$ quodam ac quolibet majori permaneat

(3) . . . . . $nf(n) \geq$ numero quodam edito $N$;

ambæ series, quarum termini generales sunt

$$(4) \ldots \begin{cases} f(n).\mathrm{Sin}\left(\mathrm{ArcTg}\frac{v}{\varrho+1}+\mathrm{ArcTg}\frac{v}{\varrho+2}+\ldots\ldots+\mathrm{ArcTg}\frac{v}{\varrho+n}\right) \\ \text{et} \\ f(n.\mathrm{Cos}\left(\mathrm{ArcTg}\frac{v}{\varrho+1}+\mathrm{ArcTg}\frac{v}{\varrho+2}+\ldots\ldots+\mathrm{ArcTg}\frac{v}{\varrho+n}\right), \end{cases}$$

($\varrho$ reali haud negativâ),

divergentes erunt $v$ positivâ æque ac negativâ. —

---

*) Liouville, Journ. de Math. pures et appl. T. VII. 1842. pag. 43—48.

**) Quæ quidem res ita se habet. M. Duhamel in T. IV. Journal de Liouville (1839) propositionem, de qua quæritur, Theorematis hujus I. (formâ licet paul-

Ne hujus quidem Theorematis demonstrandi negotium heic nobis injungere par est, ét quidem duplici caussâ. Etenim quod hoc Theorema alii cuidam, subtili admodum æque ac generali, intimo conjunctum est nexu; propterea continenti illi orationis tenori, quo in rebus Analyticis uti decet, male foret consultum, si alterum heic ab altero separatum tractare susciperemus. Am-

---

lo aliâ indutam) demonstratam et quidem titulo «Nouvelle règle sur la convergence des séries» subscriptam exhibuit, nescius ille quidem Dissertationis cujusdam in Journal de Math. et de Phys. p. Ettingshausen et Baumgartner Vol. X. dudum perscriptæ, in qua jam Cel. Raabe primus ille quidem hoc ipsum Theorema (et quidem eâ, qua nos usi sumus, formâ) demonstraverat: cujus præterea Dissertationis memoriam haud multo post Auctor ille in Crelle's Journal f. d. r. u. a. Math. T. XI pag. 309 et quidem in suâ "Note sur théorie der converg. u. diverg. d. Reihen" [translatâ eâ quidem postea per Cel. Lebesgue atque in T. VI. Journal de Liouville illatâ] revocaverat. —

Usus Theorematis hujusce, ut constat, in eo præcipue versatur, ut ope illius dijudicari nonnumquam possit convergens sit necne series termini generalis $f(n)$ talis, cui $\lim \frac{f(n)}{f(n+1)} = 1$ sit. Nec minus constat, quâ hoc Theorema affecerit dilatatione Bertrand l. c. in T. VII. Journal de Liouville. Præterea abs re haud erit paucis hoc loco monere nuper admodum (1844) Illustr. N. G. de Sehultén in Societ. Scient. Fennica rem quodammodo repetiisse. Scilicet Bertrand in præclara sua regularum serie exhibendâ non solum formam, quâ primæ earum usus erat Duhamel, profecto non aptiorem eam quidem conservaverat, sed ipsam quoque demonstrationem levius aliquanto quam par est expeditam reliquerat. Schultén eidem huic seriei regularum formâ, quâ jam primæ earum olim usus erat auctor Raabe, indutarum completam l. c. reddidit demonstrationem. — Qua de re totâ licet nonnulla, eademque haud utique levissimi momenti, verba adjicienda habeamus; satius tamen hoc tempore in iis quæ jam allata sunt subsistere putavimus, præsertim quum nobis heic solâ eâ regulâ, quam continet Theor. illud I. opus erit. —

bo autem hoc loco unâ pertractare ineptam redderet nimiumque prolixam hanc dissertationem, quippe cui non nisi unico hoc Theor. II opus erit. Quibus nos rebus adducti nuper admodum ambo hæc Theoremata peculiari cuidam dissertationi mandata Reg. Scient. Academiæ Stockholm. referenda obtulimus. —

Iis jam præmissis rem ipsam adgredimur. —

2. Ex iis, quæ jam in Parte I:ma harum "Exercitationum" allata sunt, habetur (*m* denotante num. integrum)

$$(3) \ldots\ldots \frac{\mu+\nu\sqrt{-1}-(m-1)}{m} =$$

$$= \pm\sqrt{\left(\frac{\mu-m+1}{m}\right)^2+\left(\frac{\nu}{m}\right)^2}\cdot\left(\mathrm{Cos\,ArcTg}\frac{\nu}{\mu-m+1}+\sqrt{-1}\,\mathrm{SinArcTg}\frac{\nu}{\mu-m+1}\right)$$

prout $\mu >$ aut $< m-1$ est. Et quidem si $\mu$ numerum quemdam integrum aut $o$ conficit $(\mu=m-1)$; una vel altera justa est æquatio, si modo per $\mathrm{Arc\,Tg}\frac{\nu}{\mu-m+1}$ intelligatur in æquat. superiori $\pm\frac{\pi}{2}$, prout $\nu$ positiva est aut negativa, atque in inferiori vice versâ. Si fuerit $\nu=o$ una cum $\mu=m-1$, omni absque reservato ambæ æquationes in identicam $o=o$ abeunt. —

Ex quo patet esse semper, $n$ denotante numerum integrum,

(6) . . . . . Modulum ipsius $y_n =$

$$= \sqrt{\left[\left(\frac{\mu}{1}\right)^2+\left(\frac{\nu}{1}\right)^2\right]\left[\left(\frac{\mu-1}{2}\right)^2+\left(\frac{\nu}{2}\right)^2\right]\left[\left(\frac{\mu-2}{3}\right)^2+\left(\frac{\nu}{3}\right)^2\right]\cdots\left[\left(\frac{\mu-n+1}{n}\right)^2+\left(\frac{\nu}{n}\right)^2\right]},$$

$= R_n$ (breviter). —

Qua ex æquatione et quidem vi Theorematis illius I. facile patebit seriem Modulorum ipsorum

(7) . . . . . $1, R_1, R_2, R_3,$ &c.

convergentem esse, dum $\mu$ positiva est quantitas, $\nu$ reali qualibet. Etenim — ut omittatur casus ille specialis $\nu = 0$ una cum $\mu =$ num. integro [quo in casu res per se patet, quippe quod series tunc finita est] — habetur ex (6), $\nu$ reali quâlibet, $n$ quodam ac quolibet majori

$$\frac{R_n}{R_{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\mu-n}{n+1}\right)^2+\left(\frac{\nu}{n+1}\right)^2}} = \frac{n+1}{n-\mu}\sqrt{\frac{1}{1+\left(\frac{\nu}{n-\mu}\right)^2}} = \frac{n+1}{n-\mu}\left[1+\left(\frac{\nu}{n-\mu}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}},$$

ideoque

$$\frac{n.R_n}{R_{n+1}} - (n+1) = (n+1)\left\{\frac{n}{n-\mu}\left[1+\left(\frac{\nu}{n-\mu}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}} - 1\right\},$$

$$= \frac{n+1}{n-\mu}\left\{\mu + n\left[1+\left(\frac{\nu}{n-\mu}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}} - n\right\},$$

cui limes, crescente $n$ indefinite, $\mu$ positiva est; ideoque series convergens. —

Itaque pro certo statui licet seriem ipsam membri posterioris (I), dum Mod.$x=1$ ponitur, convergentem esse, quoties $\mu$ positiva sit quantitas. —

3. Divergentem eam esse, quoties $\mu$ negativa numerice $\geqq 1$ fuerit, faciliori admodum negotio ex ipsa moduli (6) natura perspici licet. Etenim si fuerit

$$\mu = -(1+\varrho), \quad (\varrho \text{ numerus aut } o),$$

ex (6) habetur

$$(6')\ldots\ \text{Mod. } y_n = \sqrt{\left(1+\frac{\varrho}{1}\right)^2+\left(\frac{\nu}{1}\right)^2}\cdot\sqrt{\left(1+\frac{\varrho}{2}\right)^2+\left(\frac{\nu}{2}\right)^2}\ldots\ldots\sqrt{\left(1+\frac{\varrho}{n}\right)^2+\left(\frac{\nu}{n}\right)^2},$$

qui quoniam infra 1 numquam decrescit, res jam in aprico posita est. —

4. Sin vero $\mu = o$ est aut negativa numerice $< 1$, quoniam tunc series illa (7) modulorum in genere divergens est, attamen terminus illius generalis $R_n$ crescente $n$ indefinite ipse indefinite decrescens*), nihil ex ea concludi licet de natu-

---

*) Duplicem hanc assertionem sic licet vindicari. — Quoties $\mu = -\varrho$ ($\varrho$ haud negativâ) sit, secundum (6) habetur

$$(6'')\ldots\ R_n = \sqrt{\left(\frac{\varrho}{1}\right)^2+\left(\frac{\nu}{1}\right)^2}\sqrt{\left(\frac{\varrho+1}{2}\right)^2+\left(\frac{\nu}{2}\right)^2}\ldots\ldots\sqrt{\left(\frac{\varrho+n-1}{n}\right)^2+\left(\frac{\nu}{n}\right)^2},$$

$$(\varkappa)\ldots = \frac{1}{n}\sqrt{\varrho^2+\nu^2}\cdot\sqrt{\left(1+\frac{\varrho}{1}\right)^2+\left(\frac{\nu}{1}\right)^2}\sqrt{\left(1+\frac{\varrho}{2}\right)^2+\left(\frac{\nu}{2}\right)^2}\ldots\sqrt{\left(1+\frac{\varrho}{n-1}\right)^2+\left(\frac{\nu}{n-1}\right)^2},$$

quæ quidem numquam inferior ipsâ $\frac{1}{n}\sqrt{\varrho^2+\nu^2}$ evadit. Ex quo patet seriei (7) modulorum, quoties $\mu$ haud positiva sit ($=-\varrho$), summam $n+1$ terminorum primorum haud minorem evadere ac

$$\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots\ldots+\frac{1}{n}\right)\sqrt{\varrho^2+\nu^2},$$

ra seriei ipsius (I) pro Mod. $x=1$. — In hoc autem casu rem eà fere viâ, quam *Abel* munivit *), expediri licebit. Heic enim $\mu+1$ positiva est quantitas ideoque iis convenienter, quæ modo in art. 2 probata sunt, pro certo statui licet seriem

(8) . . . . . $1, (y+1)_1 x, (y+1)_2 x^2, (y+1)_3 x^3$, &c.

convergentem esse, etiamsi Mod. $x=1$ sit. — Sit in hoc casu

$$s_n = 1 + y_1 x + y_2 x^2 + y_3 x^3 + \ldots\ldots\ldots y_n x^n ;$$

habebitur, multiplicando per $1+x$,

$$(1+x).s_n = 1 + (y_1+1)x + (y_2+y_1)x^2 + \ldots\ldots + (y_n+y_{n-1})x^n + y_n x^{n+1} ,$$

$$= 1 + (y+1)_1 x + (y+1)_2 x^2 + \ldots\ldots + (y+1)_n x^n + y_n x^{n+1} . —$$

---

eamque igitur ipsam divergentem esse, certe quoties $\mu$ negativa fuerit. —

Nihilominus terminus illius generalis, quoties $\varrho < 1$ sit, crescente $n$ indefinite ipse decrescit indefinite: id quod ex eo patet, quod loco ($\alpha$) substitui semper licet

$$(\alpha') \ldots\ldots \sqrt{\varrho^2+\nu^2}\cdot\frac{(\varrho+1)(\varrho+2)\ldots\ldots(\varrho+n-1)}{2.\quad 3\ldots\ldots n}\sqrt{\left[1+\left(\frac{\nu}{\varrho+1}\right)^2\right]\left[1+\left(\frac{\nu}{\varrho+2}\right)^2\right]\ldots\ldots\left[1+\left(\frac{\nu}{\varrho+n-1}\right)^2\right]},$$

cujus prior factor $\dfrac{(\varrho+1)(\varrho+2)\ldots\ldots(\varrho+n-1)}{2.\quad 3\ldots\ldots n}$, dum $\varrho < 1$ est, crescente $n$ indefinite ipse decrescit indefinite [vid. ex. gr. Schlömilch's Handbuch pag. 115]; posterior autem, quoniam $1+\alpha \leqq e^{\alpha}$ est (prout $\alpha$ positiva aut $o$), productum conficit inferius (et quidem, si $\nu = o$, æquale) ac

$$(\beta) \ldots\ldots\ldots \sqrt{e^{\nu^2}\cdot\left[\frac{1}{(\varrho+1)^2}+\frac{1}{(\varrho+2)^2}+\ldots\ldots+\frac{1}{(\varrho+n-1)^2}\right]}$$

ideoque, etiamsi $n$ crescat indefinite, finitum ipse conservat valorem. —

*) Oeuvr. Compl. T. I. pag. 85. —

Jam denotante $S$ summam seriei convergentis (8), ita ut

$$S = 1 + (y+1)_1 x + (y+1)_2 x^2 + \text{&c.},$$

patet in tantum $n$ perveniri licere, pro quo et quolibet majori differentia

$$(1+x)s_n - S \quad \text{seu} \quad y_n x^{n+1} - \left[(y+1)_{n+1} x^{n+1} + (y+1)_{n+2} x^{n+2} + \text{&c.}\right]$$

indefinite parum ab $o$ discrepet, quoniam $y_n$ (vid. notam præced. infra contextum) crescente $n$ indefinite ipsa indefinite in $o$ convergit: seu — quod idem valet, certe nisi $1+x=o$ sit — pro quo et quolibet majori ipsa

$$s_n \quad \text{seu} \quad 1 + y_1 x + y_2 x^2 + \ldots\ldots + y_n x^n$$

indefinite parum a finitâ quadam determinatàque quant. $\frac{S}{1+x}$ discrepet. —

Itaque pro certo statui licet seriem membri posterioris (I) convergentem esse, quoties $\mu = o$ fuerit aut negativa numerice $< 1$, etiamsi Mod. $x = 1$ ponatur, certe nisi eodem tempore $x$ ipsa $= -1$ sit. —

*Nota.* Probe est notandum valere hanc assertionem, etiamsi $\mu$ negativa indefinite parum ab $o$ discrepet [ut ex ipsa demonstratione perspicitur]. — Nec id solum. In art. 2 præced. probata est series nostra convergens esse, $\mu$ positivâ (scilicet dâta quâlibet positivâ) *).

---

*) Conf. notam infra contextum pag. 6. Part. Iæ harum "Exercitationum". — Reverà ut in adhibendo Theor. illo I. evitentur errores, probe est observandum, ut ver-

At iisdem ipsis verbis, quibus in demonstratione novissima usi sumus, probari licet constare sibi hanc ipsam assertionem novissimam, etiamsi $\mu$ positiva indefinite exigua fuerit *). — Quo facto jam statui licet seriem membri posterioris (I), dum Mod. $x=1$ est, convergentem esse

1:o) quoties $\mu$ positiva sit,

2:o) $\mu$ reali quâlibet supra $-1$, nisi $x=-1$ fuerit. —

Sin vero $x=-1$ ponitur, dum $\mu=o$ est ($\nu$ positivâ aut negativâ) aut negativa numerice $<1$ (etiamsi tunc $\nu=o$ fuerit), divergens erit series (I) i. e. heic

(9) . . . . . $1, -y_1, y_2, -y_3, y_4,$ &c.

id quod facillimo negotio patet, dum $\nu=o$ est ($\mu$ negativa $=-\varrho$, numerice $<1$): nam series tunc abit in istam

---

bo "positiva" in (2′) intelligatur "positiva nec tamen indefinite exigua": id quod in nota cit. jamjam est monitum atque præterea ex ipso modo hujusce theorematis demonstrandi plane apparet.

*) Sola ea accidit immutatio, ut, quo heic perspiciatur $y_n$ crescente $n$ indefinite ipsa indefinite in $o$ convergere, moneatur secund. (6) heic haberi

$$(\gamma) \ldots R_n = \sqrt{\mu^2+\nu^2}\cdot\frac{(1-\mu)(2-\mu)\ldots(n-1-\mu)}{2.\quad 3\ldots n}\sqrt{\left[1+\left(\frac{\nu}{1-\mu}\right)^2\right]\left[1+\left(\frac{\nu}{2-\mu}\right)^2\right]\ldots\left[1+\left(\frac{\nu}{n-1-\mu}\right)^2\right]},$$

eaque haud major esse producto ipsius $\sqrt{\mu^2+\nu^2}\cdot\frac{(1-\mu)(2-\mu)\ldots(n-1-\mu)}{2.\quad 3.\ldots\ldots n}$ per

$$(\delta) \ldots\ldots \sqrt{e^{\nu^2}\cdot\left[\frac{1}{(1-\mu)^2}+\frac{1}{(2-\mu)^2}+\ldots+\frac{1}{(n-1-\mu)^2}\right]}\ .\ —$$

$$(9') \quad \ldots\ldots\ldots 1, \frac{\varrho}{1}, \frac{\varrho(\varrho+1)}{1.2}, \frac{\varrho(\varrho+1)(\varrho+2)}{1.2.3}, \text{ &c.}$$

quæ quidem divergens est $\varrho$ numero quolibet: id quod (si placet) eodem modo ac in nota prima sub contextu hujusce art. 4 perspici licet ex eo quod terminus illius generalis

$$\frac{\varrho}{n}\left(1+\frac{\varrho}{1}\right)\left(1+\frac{\varrho}{2}\right)\ldots\ldots\left(1+\frac{\varrho}{n-1}\right)$$

semper $> \frac{\varrho}{n}$ est, ideoque summa $n+1$ terminorum primorum

$$> \varrho\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots\ldots+\frac{1}{n}\right). —$$

Atque si $v$ positiva est aut negativa ($\varrho$ numerus $< 1$ aut $o$); seriem, de qua quæritur, sic licet describi:

$$(9'')\ldots 1, \frac{\varrho-v\sqrt{-1}}{1}, \frac{\varrho-v\sqrt{-1}}{1}\cdot\frac{\varrho+1-v\sqrt{-1}}{2}, \frac{\varrho-v\sqrt{-1}}{1}\cdot\frac{(\varrho+1-v\sqrt{-1})(\varrho+2-v\sqrt{-1})}{2.3},\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\frac{\varrho-v\sqrt{-1}}{1}\cdot\frac{(\varrho+1-v\sqrt{-1})(\varrho+2-v\sqrt{-1})\ldots\ldots\ldots(\varrho+n-v\sqrt{-1})}{2.\quad 3.\ldots\ldots\ldots(n+1)}, \text{ &c.}$$

Quæ utrum convergens sit an divergens, dijudicari non licet (uti jam supra est monitum) ex natura seriei, quæ ex modulis horum terminorum conficitur. Nec tamen, quo res decernatur, necesse est *Abel* duce *) tam longe ab rectâ decedere,

---

*) Oeuvr. Compl. T. I. pag. 86. — De cætero heic nobis in eo solo subsistere non licet, ut moneamus *Abel* hoc loco rem minus eleganter gessisse; celari non potest, Auctorem inclytissimum incuriâ quâdam brevitati heic melius quam rigori Matheseos ac subtilitati consuluisse. Qua de re fusius in nota infra contextum §:i 2:i insequentis erit disserendum.

ut consideretur functio ipsa $(1+x)^y$, quæ, dum Mod. $x<1$ est, summam seriei tunc convergentis conficit. Directo enim et quidem ope Theorematis illius II. rem expediri licebit hoc modo. — Divergentem esse seriem (9″), $v$ positivâ æque ac negativâ, dum $\varrho$ numerus est $<1$ aut $o$, pro certo statui licebit, si modo probata fuerit talis esse series termini generalis

$$(10)\ \ldots\ldots\ \frac{(\varrho+1-v\sqrt{-1})(\varrho+2-v\sqrt{-1})\ldots\ldots(\varrho+n-v\sqrt{-1})}{2.\qquad 3\ldots\ldots\ldots\ (n+1)}$$

seu, quod idem valet,

$$\frac{1}{n+1}\cdot\frac{(\varrho+1-v\sqrt{-1})(\varrho+2-v\sqrt{-1})\ldots\ldots(\varrho+n-v\sqrt{-1})}{1.\qquad 2.\ldots\ldots\ldots n}$$

seu, ut complete dicatur,

$$(10')\ldots\ldots\frac{1}{n+1}\sqrt{\left(1+\frac{\varrho}{1}\right)^2+\left(\frac{v}{1}\right)^2}\cdot\sqrt{\left(1+\frac{\varrho}{2}\right)^2+\left(\frac{v}{2}\right)^2}\ldots\ldots\sqrt{\left(1+\frac{\varrho}{n}\right)^2+\left(\frac{v}{n}\right)^2}\left\{\mathrm{Cos}\left(\mathrm{A.Tg}\frac{v}{\varrho+1}+\mathrm{A.Tg}\frac{v}{\varrho+2}\right.\right.$$
$$\left.\left.\ldots\ldots+\mathrm{A.Tg}\frac{v}{\varrho+n}\right)-\sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}\,(\text{ejusd. qua}\right.$$

Divergentem autem hanc esse, $v$ positivâ æque ac negativâ (et quidem $\varrho$ reali quâlibet haud negativâ), id ex Theoremate modo cit. II. rectà consequitur positâ in eo

$$(11)\ \ldots\ldots f(n)=\frac{1}{n+1}\sqrt{\left(1+\frac{\varrho}{1}\right)^2+\left(\frac{v}{1}\right)^2}\cdot\sqrt{\left(1+\frac{\varrho}{2}\right)^2+\left(\frac{v}{2}\right)^2}\ldots\ldots\sqrt{\left(1+\frac{\varrho}{n}\right)^2+\left(\frac{v}{n}\right)^2}.\ —$$

Itaque pro certo jam statui licet seriem membri posterioris (I) divergentem esse, si $x=-1$ ponatur,

dum $\begin{cases}\mu=o\text{ est,}\\ v\text{ positivâ æque ac neg.}\end{cases}$ atque dum $\begin{cases}\mu\text{ negat. est numerice}\\ \text{etiamsi tunc }v=o\text{ sit. —}\end{cases}$

5. Quibus ex omnibus jam constat seriem membri posterioris (I), dum Mod. $x=1$ est, convergentem esse

1:o) quoties pars realis ipsius $y(=\mu+\nu\sqrt{-1})$ posit. sit, et quidem

2:o) nisi $x$ ipsa $=-1$ sit, $\mu$ reali quâlibet supra $-1$;

divergentem autem

1:o) quoties pars realis ipsius $y$ negativa sit numerice $\geq 1$,

et quidem

2:o) dum $x=-1$ est, etiamsi $\mu=o$ [$\nu$ positivâ aut negat.] aut negativa numerice $<1$ [etiamsi tunc $\nu=o$] fuerit. —

*Nota.* Ex art. 3 collato cum iis, quæ in fine art. 4 præcedentis commemorata sunt, facile patet seriem — quum in casibus 1:o) et 2:o) novissimis divergens est $\nu$ positivâ aut negativâ — divergentem esse et quâ partem realem et quâ partem imaginariam. —

## §. 2.

1. Quum jam in eo sumus, ut probata sit series membri posterioris (I) convergens esse non modo dum Mod. $x<1$ est, sed certis etiam in casibus pro Mod. $x=1$; quo res in finem propositum perducatur, reliquum est ut inquiratur, verane sit æquatio ipsa (I) in his etiam casibus. Qua tamen in re

**majori uti decet circumspectione quam vulgo solet fieri *); — et quidem sufficiet ambo hæc observasse momenta;**

---

*) Scilicet si probata fuerit æquatio terminorum realium

($\varepsilon$) . . . . . $F(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + \&c.$

vera esse $x$ datâ quâlibet (reali) ab $x_0$ quodam usque ad $X$ (exclus.) atque præterea series ipsa

($\zeta$) . . . . . $f_1(X),\ f_2(X),\ f_3(X),\ \&c.$

esse convergens; ex eo nentiquam in genere licet concludi [id quod nihilominus haud raro apud harum rerum Scriptores fieri solet], veram quoque esse æquationem istam

($\eta$) . . . . . $F(X) = f_1(X) + f_2(X) + f_3(X) + \&c.$

etiamsi insuper expertum foret continuas esse inter $x_0$ et $X$ functiones illas membri posterioris ($\varepsilon$) ipsamque $F(x)$: — id quod ex sola inspectione æquationis illius

($\vartheta$) . . . . $\frac{\pi - x}{2} = \mathrm{Sin}\, x + \frac{1}{2}\mathrm{Sin}\, 2x + \frac{1}{3}\mathrm{Sin}\, 3x + \&c.$

lucide apparet. — Scilicet in eo res hæret, quod series ista membri posterioris ($\vartheta$) convergens non uno tenore usque ad $x = o$ permanet: id quod pro certo statui licet ex iis, quæ mox in «1:o) monita erunt. —

Huic ipsi rei jam *Abel* attentus totum se in series secundum dignitates ipsius $x$ progredientes convertit et quidem in parte priori Theorematis sui IV (Oeuvr. Compl. T. I pag. 69) propositionem, quam nos quidem signo illo «2:o)» notavimus, suo more demonstravit. [Negari non potest oportuisse Auctorem et dictionem ipsam Theseos distinctam magis reddere atque perspicuam et demonstrationem magis concinnam: utrâque in re nos debitam in «2:o)» posuimus operam]. — Posterior IV:i hujusce Theorematis pars eam continet propositionem, ex qua conficitur Theor. nostrum III, at omissâ tamen reservatione illâ «siquidem reverâ $F(u)$ convergente $u$ indefinite» &c.: quonam jure nescio. Etenim si fieret ut $F(u)$, convergente $u$ indefinite in $U$, ipsa non tenderet in limitem finitum determinatumque; quid tunc? falsa profecto esset vel potius plane absurda assertio. Et quidem hoc fieri nequire, a priori (ut opinor) asseverari non licet. Scilicet de natura functionis illius $F(u)$ nihil aliud ex eo, quod $F(u)$ ista summam seriei (17) pro $u$ quâlibet datâ usque ad $U$ (exclus.) juste exprimit, judicari licet quam quod finita est hæc $F(u)$ atque continua ab o inde usque ad datum quemlibet $u$-valorem inter $U$ et o. Summa equidem

**1:o)**

**Si probata fuerit æquatio terminorum realium**

(12) . . . . . $F(u)=f_1(u)+f_2(u)+f_3(u)+$ &c.

**vera esse $u$ datâ quâlibet reali [ab $u_o$ quodam] usque ad $U$ (exclusive), et quidem termini seriei membri posterioris functiones ipsius $u$ continuas inter hos limites conficiant: si insuper convergens uno tenore permaneat series usque ad**

---

seriei, scilicet $f_1(u)+f_2(u)+f_3(u)+$ &c. [breviter $\varphi(u)$], finita ipsa est atque continua inter $o$ et $U$ (inclusive), quoniam series ipsa (18) convergens est; sed ex eo solo, quod functio quædam $F(u)$ identica est cum tali $\varphi(u)$ — ideoque finita ipsa atque continua — ab $o$ inde usque ad datum quemlibet $u$-valorem inter $o$ et $U$, pro certo sane statui non potest finitam hanc esse $F(u)$ in ipso etiam limite $U$. —

In eo *Abel* erravit vel potius, ut rem acu tangamus, *Abel* summam ipsam $\varphi(u)$ seriei cum functione illâ $F(u)$, quæ huic summæ congruere usque ad *datum* quemlibet $u$-valorem inter $o$ et $U$ probata erat, incuriâ quâdam commisenit: id quod et ex ipso modo illius Theorema sum IV:tum demonstrandi, si rem juste perpendas, et (ut cætera omittam) ex dictis quibusdam in pag. 83 Dissertationis illius plane perspicitur. Quæ quidem incuria quamvis plerisque in locis Dissertationis Abelianæ minori fuerit momento — quippe quod ea functio $F(u)$, de qua in hac Dissert. agitur, reverâ convergente $u$ in $U$ ipsa indefinite in limitem finitam determinatumque tendit, quoties series illa (18) convergens sit —; tamen ex hoc ipso errore orta est, cujus in nota ultima sub contextu §:i præcedentis mentionem fecimus, methodus illius ut breviter ita haud satis accurate probandi (in pag. 86) divergentem esse seriem membri posterioris (1), dum $x=-1$ est, $\mu$ negativâ numerice $<1$ aut $=o$. "Si enim in hoc casu", ait, "convergentes essent ambæ, de quibus a"gitur, series reales pro $u=-1$; fieri non potest, quin summæ earum tunc eos con"ficerent limites, in quos convergente $u$ in $-1$ contendant partes ambæ membri prio"ris $(1+x)^\mu$, realis inquam et imaginaria. At harum neutra in limitem quemdam finitum "determinatumque in hoc casu tendit. Ideirco (!) fieri non potest ut series tunc conver"gentes sint." — Vera est (ut videtur) conclusio, at ratio haud satis sufficiens —

$U$ inclusive; ex Theorem. illo II. Part. I:æ consequitur summam ipsam

(13) . . . . . $f_1(u)+f_2(u)+f_3(u)+$ &c.

continuam necesse esse functionem inter limites $u_0$ et $U$. — Jam quoniam $F(u)$ hanc summam juste exprimit $U$ datâ quâlibet [ab $u_0$ inde] usque ad $U$ (exclusive) — ex quo consequitur (vi Theorematis illius II) continuam hanc esse $F(u)$ inter $u_0$ et datum quemlibet $u$-valorem usque ad $U$ (exclus.) —; patet, si insuper $F(u)$ convergente $u$ indefinite in $U$ (ab $u_0$-plagâ inde) ipsa indefinite in limitem quemdam finitum determinatumque "lim $F(u)$" tendat, quo inveniatur summa serici convergentis

(14) . . . . . $f_1(U)$, $f_2(U)$, $f_3(U)$, &c.

sufficere ut exquiratur hic "lim $F(u)$". —

2:o)

Si fuerit series

(15) . . . . . $a_0$, $a_1u$, $a_2u^2$, $a_3u^3$, &c. (coëffic. $a$ realibus)

convergens $u$-valore quodam (reali) $U$; pro certo statui licet convergentem eam uno tenore permanere $u$-valore quolibet $\varepsilon$ limites $U$ et $o$ haud excedente.

Sufficit probari in tantum $n$ perveniri licere, pro quo et quolibet majori summa terminorum quotcumque

(16) . : . ... $a_{n+1}\varepsilon^{n+1}+a_{n+2}\varepsilon^{n+2}+.....+a_{n+m}\varepsilon^{n+m}$

numerice $<$ quovis dato numero $\omega$ sit. — Quoniam loco hujus (16) substitui licet

$$(16')\ldots\ldots \left(\frac{\varepsilon}{U}\right)^{n+1} a_{n+1}U^{n+1}+\left(\frac{\varepsilon}{U}\right)^{n+2} a_{n+2}U^{n+2}+\ldots+\left(\frac{\varepsilon}{U}\right)^{n+m} a_{n+m}U^{n+m},$$

i. e. *) [quoniam heic $\frac{\varepsilon}{U}$ positiva est quantitas]

productum ipsius $a_{n+1}U^{n+1}+a_{n+2}U^{n+2}+\ldots\ldots+a_{n+m}U^{n+m}$

per medium quoddam numerorum, unitatem haud excedentium,

$$\left(\frac{\varepsilon}{U}\right)^{n+1},\quad \left(\frac{\varepsilon}{U}\right)^{n+2},\ldots\ldots \left(\frac{\varepsilon}{U}\right)^{n+m};$$

res jam in aprico posita est, quippe quod series illa (15) convergens erat pro $u=U$. —

*Q. E. D.*

Ex quibus ambobus Corollarii instar consequitur Theorema, cujus in re præsenti præcipuus nobis erit usus, hocce:

### Theorema III.

Si probata fuerit æquatio terminorum realium

$$(17)\quad \ldots\ldots F(u)=a_0+a_1u+a_2u^2+a_3u^3+\&c.$$

vera esse $u$ datâ quâlibet (ab $o$ inde) usque ad $U$ (exclusive) atque insuper convergens esse series ipsa

$$(18)\quad \ldots\ldots a_0,\ a_1U,\ a_2U^2,\ a_3U^3,\ \&c.;$$

quo inveniatur summa illius, sufficiet ut exquiratur

*) Vid. ex. gr. Cauchy, Cours d'Anal.

*lim F(u)*, siquidem reverâ *F(u)* convergente *u* indefinite in *U* (ab *o* inde) ipsa indefinite in limitem quemdam finitum determinatumque *lim F(u)* contendat. —

2. Vi hujusce Theorematis rem facili jam negotio expediri licebit. — Etenim ex hoc Theoremate cum iis collato, quæ in art. 5 §:i præcedentis statuta sunt, patet licitum nobis fore statui veram esse æquationem (I) quantitate quâlibet $x$ seu $u(\mathrm{Cos}w+\sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}\,w)$, cujus modulus unitatem haud excedat,

1:o) dum $\mu$ positiva est,

quin immo 2:o) $\mu$ reali quâlibet supra $-1$, certe si excipiantur $x$-valores indefinite ad $-1$ propinqui,

si modo probatæ fuerint membri prioris

$$[1+u(\mathrm{Cos}w+\sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}w)]^{\mu+\nu\sqrt{-1}}$$

partes ambæ (realis, inquam, et imaginaria), crescente valore numerico ipsius $u$ indefinite prope ad 1, convergere in suum utraque limitem finitum determinatumque

1:o) dum $\mu$ positiva est, $w$ arcu quolibet,

2:o) $\mu$ reali quâlibet supra $-1$, quoties, crescente $u$ indefinite prope ad $+1$, $\mathrm{Cos}\,w$ finitâ quantitate ab $-1$ discrepet *),

nec non quoties, decrescente $u$ indefinite prope ad $-1$, $\mathrm{Cos}\,w$ finitâ quantitate ab $+1$ discrepet *).

---

*) Etenim quoniam heic modulus $\sqrt{u^2}$ unitatem haud excedere ponitur, patet heic $x$-valorem aliter ad $-1$ indefinite adpropinquare nequire, nisi ponatur valor numericus ipsius $u$ indefinite prope ad 1 accrescere, — seu q. i. v. $x$-valorem indefinite ipsi $-1$ contiguum esse nequire, si valor numer. ipsius $u$ finitâ quantitate ab 1 discrepet. —

Et quidem reverâ $\mu$ reali quâlibet ita esse, quoties Cos $w$ finitâ quantitate ab $\mp 1$ (prout $u$ crescit in $+1$ aut decrescit in $-1$ indefinite) discrepet, omni absque negotio probari licet expressione ipsâ $[1+u(\mathrm{Cos}w+\sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}\,w)]^y$ consideratâ. — Etenim si primo valorem hujus pro $u=+1$, finitum illum quidem determinatumque

$$(1+\mathrm{Cos}w+\sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}\,w)^y \text{ seu } e^{y\log(1+\mathrm{Cos}w+\sqrt{-1}\mathrm{Sin}w)}\ ^{*)},$$

cum valore suo pro $u=1-\varepsilon$ ($\varepsilon$ numero indefinite exiguo), nempe

$$e^{y[\log(1+\mathrm{Cos}w+\sqrt{-1}\mathrm{Sin}w-\varepsilon(\mathrm{Cos}w+\sqrt{-1}\mathrm{Sin}w)]} \text{ seu}^{**)}\ e^{y\left\{\log(1+\mathrm{Cos}w+\sqrt{-1}\mathrm{Sin}w)+\log\left(1-\varepsilon\frac{\mathrm{Cos}w+\sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}\,w}{1+\mathrm{Cos}w+\sqrt{-1}\mathrm{Sin}w}\right)\right\}},$$

conferas; differentiam habebis

$$e^{y\log(1+\mathrm{Cos}w+\sqrt{-1}\mathrm{Sin}w)}\cdot\left\{e^{y\log\left(1-\varepsilon\frac{\mathrm{Cos}w+\sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}w}{1+\mathrm{Cos}w+\sqrt{-1}\mathrm{Sin}w}\right)}-1\right\}$$

---

*) Scilicet hic est valor (pro $u=1$) 2:i membri æquationis (I'') in P. I:ma Exercitationum, nempe

$$\ldots[2(1+\mathrm{Cos}w)]^{\frac{\mu}{2}}e^{-\nu\mathrm{ArcTg}\frac{\mathrm{Sin}w}{1+\mathrm{Cos}w}}\cdot\left\{\mathrm{Cos}\left[\log[2(1+\mathrm{Cos}w)]^{\frac{\nu}{2}}+\alpha.\mathrm{ArcTg}\frac{\mathrm{Sin}\,w}{1+\mathrm{Cos}\,w}\right]+\right.$$
$$\left.+\sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}\,[\text{ejusd. quantit.}]\right\},\ —$$

quæ quidem, dum Cos $w$ finitâ quant. ab $-1$ discrepat, finita ipsa est quantitas ac determinata. —

**) Scilicet, ut constat, æquatio

$$\log(\alpha\beta)=\log\alpha+\log\beta$$

vera est, quoties partes reales non modo quantitatum $\alpha$ et $\beta$ sed etiam producti ipsius $\alpha\beta$ positivæ sint: — quin immo (ut nos in Dissertatione supra in P. I:ma pag. 72 commemoratâ probavimus) quoties haud negativæ sint. —

quam, decrescente $\varepsilon$ indefinite, ipsam in $o$ indefinite convergere patet. — Et quidem secundo si valorem expressionis $[1+u(\mathrm{Cos}w+\sqrt{-1}\mathrm{Sin}w)]^{\mu}$ pro $u=-1$, finitum illum determinatumque

$$(1-\mathrm{Cos}w-\sqrt{-1}\mathrm{Sin}w)^{y} \text{ seu } e^{y\log(1-\mathrm{Cos}w-\sqrt{-1}\mathrm{Sin}w)^{*)}},$$

cum valore suo pro $u=-(1-\varepsilon)$ conferas; idem (ut liquet) concludi licebit, dum $\mathrm{Cos}w$ finitâ quantitate ab $+1$ discrepat. —

Nec ullum est dubium, quin, crescente valore numer. ipsius $u$ indefinite prope ad 1, partes ambæ expressionis $(1+x)^{\mu}$ convergant in suum utraque limitem finitum determinatumque (eundemque $o$ ipsum), dum $\mu$ positiva est quantitas, etiamsi tunc $\mathrm{Cos}w$ indefinite parum ab $\pm 1$ discrepet: id quod ex solo factore earum communi $(1+2u\mathrm{Cos}w+u^2)^{\frac{\mu}{2}}$ lucide appareat. —

Quæ cum ita sint, jam hoc pronuntiari licet universale

## Theor. IV Binomiale.

Æquatio illa

(I) . . . . . $(1+x)^{y}=1+y_1 x+y_2 x^2+y_3 x^3+$ &c.

---

*) Scilicet hic est valor (pro $u=-1$) 2:i membri illius, nempe

$$(19')\ldots.[2(1-\mathrm{Cos}w)]^{\frac{\mu}{2}} e^{\nu.\mathrm{ArcTg}\frac{\mathrm{Sin}w}{1-\mathrm{Cos}w}}\left\{\mathrm{Cos}\left[\log[2(1-\mathrm{Cos}w)]^{\frac{\nu}{2}}-\mu.\mathrm{ArcTg}\frac{\mathrm{Sin}w}{1-\mathrm{Cos}w}\right]+\right.$$

$$\left.+\sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}\,[\text{ejusdem quant.}]\right\}.—$$

vera est non modo realibus $x$ (numerice $<1$) et $y$, sed $x$ et y quibuscumque formæ

$$(1) \ldots\ldots \begin{cases} x = u(\mathrm{Cos}\, w + \sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}\, w), \\ y = a(\mathrm{Cos}\, b + \sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}\, b) = \mu + \nu\sqrt{-1}, \end{cases}$$

1:o quoties Mod. $x<1$ sit;

quin immo

2:o) quoties Mod. $x$ haud $>1$ sit,

*a*) dum $\mu$ positiva est quantitas,

immo etiam

*b*) $\mu$ reali quâlibet supra $-1$, certe dum $x$ finitâ quantitate ab $-1$ discrepat *). —

Ipsa autem series membri posterioris divergens est

1:o) dum Mod. $x=1$ est,

*a*) quoties $\mu$ negativa numerice $\geq 1$ fuerit,

*b*) dum $x=-1$, etiamsi $\mu=o$ [$\nu$ positivâ aut neg.] aut negativa numerice $<1$ [$\nu$ positivâ, negativâ aut $o$] fuerit;

2:o) quotiés Mod. $x>1$ sit **)(nisi forte fuerit Exponens $y$ numerus integer aut $o$). —

Dum $y$ num. est integer ideoque series finita; vera est æquatio, etiamsi tunc Mod. $x>1$ fuerit. —

---

*) Iis convenienter, quæ in nota infra contextum pag. 66 Part. I:mæ monita sunt, idem valent (in doctrina serierum) sola hæc verba pauca: "certe dum $x$ haud $=-1$ est". —

**) Tunc enim, ut patet, ratio Modulorum termini $(n+1)$:i et $n$:i, $n$ quodam ac quolibet majori, unitatem excedit. —

Et quoniam in iis casibus 1:o) et 2:o), in quibus vera est æquatio (I), loco membri prioris substitui licet membrum posterius æquationis (I″) in P. I:ma et quidem semper loco membri posterioris (I) membrum prius (I″); jam hoc habetur

Corollarium.

Æquatio illa (I″) vera est

1:o) quoties $u$ numerice $< 1$ sit;

quin immo

2:o) quoties $u$ numerice haud $> 1$ sit,

*a*) dum $\mu$ positiva est quantitas,

quin etiam

*b*) $\mu$ reali quâlibet supra $-1$, certe dum $u\mathrm{Cos}w$ finitâ quant. ab $-1$ discrepat*). —

Ipsa autem series membri prioris divergens est

1:o) dum $u$ numerice $= 1$ est,

*a*) quoties $\mu$ negativa numerice $\geqq 1$ fuerit,

*b*) dum $u\mathrm{Cos}w = -1$ est, etiamsi $\mu = o$ [$\nu$ positivâ aut neg.] aut negativa numerice $< 1$ [$\nu$ positivâ, negativa aut $o$] fuerit;

---

*) Seu, quod idem valet (conf. notam 1:am sub contextu art. hujus 2), explicatius: certe quoties, crescente valore num. ipsius $u$ indefinite prope ad 1, Cos$w$ finitâ quant. ab $= \mp 1$ (prout $u$ positiva est aut negativa) discrepet; et quidem breviter: Certe nisi unâ fuerint

$$\left\{\begin{matrix} u = 1 \text{ et} \\ w \text{ formâ } \pm(2k+1)\pi \end{matrix}\right\} \text{ nec } \left\{\begin{matrix} u = -1 \text{ et} \\ w \text{ formâ } \pm 2k\pi \end{matrix}\right\}. —$$

2:o) quoties $u$ numerice $>1$ sit (nisi forte fuerit $\mu+\nu\sqrt{-1}$ numerus integer aut $o$). —

*Nota.* Dum $\mu+\nu\sqrt{-1}$ numerum conficit integrum $m$ idcoque series finita est; etiamsi $u$ numerice $>1$ sit, æquatio (1''), quæ tunc istam induit formam

$$1+m_1 u(\mathrm{Cos}\, w+\sqrt{-1}\,\mathrm{Sin} w)+m_2 u^2(\mathrm{Cos}\, 2w+\sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}\, 2w)+\ldots\ldots+m_m u^m(\mathrm{Cos}\, mw+\sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}\, mw)=$$

$$=(1+2u\mathrm{Cos}\, w+u^2)^{\frac{m}{2}}\cdot\left[\mathrm{Cos}\left(m\mathrm{ArcTg}\,\frac{u\mathrm{Sin}\, w}{1+u\mathrm{Cos}\, w}\right)+\sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}\left(m\mathrm{ArcTg}\,\frac{u\mathrm{Sin}\, w}{1+u\mathrm{Cos}\, w}\right)\right],$$

vera est, certe dum $1+u\mathrm{Cos}\, w$ positiva est atque, si negativa, $m$ numerus est par: — vi eorum, quæ in ultimâ Theorematis lineâ statuta sunt *). — Minime vero valet æquatio, si negativa fuerit $1+u\mathrm{Cos}\, w$ atque eodem tempore $m$ impar. Tunc autem, quo vera fiat æquatio, sufficit ut membrum posterius signo — afficiatur **). —

---

*) Nam tunc loco ipsius $(1+x)^m$ substitui licet membrum ipsum posterius æquat. (20): id quod ex eo solo patet, quod in genere

$(\alpha+\beta\sqrt{-1})^m=[\pm\rho(\mathrm{Cos}\,\tau+\sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}\,\tau)]^m$, prout $\alpha$ positiva est aut negativa, $\rho$ denot. Modulum $\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$ atque $\tau=\mathrm{ArcTg}\,\frac{\beta}{\alpha}$. —

**) Scilicet tunc loco ipsius $(1+x)^m$ in membro priori æquat. (1) substitui licet hoc membrum posterius (20) signo — affectum, ut ex modo commemoratis liquet.

Hoc si negligeretur reservatum, ex. gr. concedi oporteret [posito $m=1$, dum $1+u\mathrm{Cos}\, w$ negativa est quantitas] esse

## §. 3.

1. Tandem quo breviter emolumenta indicentur, quæ doctrinæ seriorum realium infinitarum contingant ex eo, quod æquatio illa (I) seu (I″) valeat non modo dum $u$ numerice $< 1$ est, sed quoties numerice haud $> 1$ sit certis dumtaxat Exponentibus $\mu$; reliquum est ut indicatâ, quæ statutis in P. I:ma de veritate ac usu æquationum illarum (II) cum suis speciebus exinde contingat, immutatione vel potius extensione sigillatim denique forma, quæ hisce æquationibus positâ $u$ numerice $= 1$ accidat, consideretur.— Scilicet vi eorum, quæ in art. 1. §:i 2 Part. I:æ monita sunt, partes ambæ (realis inquam et coëfficiens ipsius $\sqrt{-1}$) membri prioris æqu. (I″) ipsa conficiunt hæc membra posteriora æquationum (II) salvâ conditione ibidem commemoratâ, si forte fuerit $\mu$ num. integer aut $o$. —

Primo quidem omnibus absque ambagibus patet de veritate generalium harum æquat. (II), loco eorum quæ in ultimis art. 1 modo commemorati lineis statuta sunt, ea ipsa edici licere, quæ in principio Corollarii mox præcedentis de veritate æqu:is (I″) exposita sunt, appositâ conditione illâ de $\mu$ numero integro aut $o$. —

---

$$\sqrt{1+2u\mathrm{Cos}w+u^2}.\mathrm{Cos}\left(\mathrm{ArcTg}\frac{u\,\mathrm{Sin}\,w}{1+u\,\mathrm{Cos}\,w}\right) = 1+u\,\mathrm{Cos}\,w,$$

nec non $\sqrt{1+2u\mathrm{Cos}w+u^2}.\mathrm{Sin}\left(\mathrm{ArcTg}\frac{u\,\mathrm{Sin}\,w}{1+u\,\mathrm{Cos}\,w}\right) = u\,\mathrm{Sin}\,w$;

quod esse falsum, per se plane apparet. —

Tum quo exponatur forma, quæ pos. $u$ numerice $=1$ æquationibus hisce contingat; quoniam semper loco $\frac{\mathrm{Sin}\, w}{1+\mathrm{Cos}\, w}$ substitui licet $\mathrm{Tg}\frac{w}{2}$ atque loco $1+\mathrm{Cos}\, w$ substitui $2\,\mathrm{Cos}^2\left(\frac{w}{2}\right)$, patet membra earum priora pos. $u=1$ abire in

$$\left\{\begin{array}{l} e^{-\nu.\mathrm{ArcTg}\left(\mathrm{Tg}\frac{w}{2}\right)}.\left(2\sqrt{\mathrm{Cos}^2\frac{w}{2}}\right)\mathrm{Cos}\left[\log\left(2\sqrt{\mathrm{Cos}^2\frac{w}{2}}\right)^{\nu}+\mu\,\mathrm{ArcTg}\left(\mathrm{Tg}\frac{w}{2}\right)\right] \\ \text{et} \\ e^{-\nu.\mathrm{ArcTg}\left(\mathrm{Tg}\frac{w}{2}\right)}.\left(2\sqrt{\mathrm{Cos}^2\frac{w}{2}}\right)^{\mu}\mathrm{Sin}\left[\log\left(2\sqrt{\mathrm{Cos}^2\frac{w}{2}}\right)^{\nu}+\mu\,\mathrm{ArcTg}\left(\mathrm{Tg}\frac{w}{2}\right)\right]; \end{array}\right.$$

ideoque posito

$$\frac{W}{2}=\mathrm{ArcTg}\left(\mathrm{Tg}\frac{w}{2}\right),$$

quoniam relatio $\mathrm{Tg}\frac{W}{2}=\mathrm{Tg}\frac{w}{2}$ dat $\mathrm{Cos}\frac{W}{2}=\sqrt{\mathrm{Cos}^2\frac{w}{2}}$, patet æquationes (II) pos. $u=1$ abire in

$$\left\{\begin{array}{l} 2^{\mu}\mathrm{Cos}^{\mu}\left(\frac{W}{2}\right).e^{-\nu\left(\frac{W}{2}\right)}\mathrm{Cos}\left[\log\left[2^{\nu}\mathrm{Cos}^{\nu}\left(\frac{W}{2}\right)\right]+\mu\left(\frac{W}{2}\right)\right]= \\ =1+\sum_{n=1}^{n=\infty}\mu_n\sqrt{\left[1+\left(\frac{\nu}{\mu}\right)^2\right]\left[1+\left(\frac{\nu}{\mu-1}\right)^2\right]\ldots\left[1+\left(\frac{\nu}{\mu-n+1}\right)^2\right]}.\mathrm{Cos}\left(nw+\mathrm{A.Tg}\frac{\nu}{\mu}+\mathrm{A.Tg}\frac{\nu}{\mu-1}+\ldots.\right. \\ \qquad\qquad \left.\ldots.+\mathrm{A.Tg}\frac{\nu}{\mu-n+1}\right), \\ 2^{\mu}\mathrm{Cos}^{\mu}\left(\frac{W}{2}\right).e^{-\nu\left(\frac{W}{2}\right)}\mathrm{Sin}\left[\log\left[2^{\nu}\mathrm{Cos}^{\nu}\left(\frac{W}{2}\right)\right]+\mu\left(\frac{W}{2}\right)\right]= \\ =\sum_{n=1}^{n=\infty}\mu_n\sqrt{\left[1+\left(\frac{\nu}{\mu}\right)^2\right]\left[1+\left(\frac{\nu}{\mu-1}\right)^2\right]\ldots\left[1+\left(\frac{\nu}{\mu-n+1}\right)^2\right]}.\mathrm{Sin}\left(nw+\mathrm{A.Tg}\frac{\nu}{\mu}+\mathrm{A.Tg}\frac{\nu}{\mu-1}+\ldots.\right. \\ \qquad\qquad \left.\ldots.+\mathrm{A\,Tg}\frac{\nu}{\mu-n+1}\right); \end{array}\right.$$

quæ igitur ambæ valent (salvâ conditione illâ de $\mu$ numero integro aut $o$)

*a*) quoties $\mu$ positiva sit quantitas,

quin etiam

*b*) $\mu$ reali quâlibet supra $-1$, certe dum $w$ haud sit formâ $\pm(2k+1)\pi$. —

De cætero patet, quoties $w$ limites $\pm\pi$ haud excedat, licere in membris prioribus arcum ipsam $\frac{w}{2}$ loco $\frac{W}{2}$ substitui.

Quod attinet ad positionem illam $u=-1$ in æquationibus (II), quoniam idem prorsus resultat, sive in expressionibus

$$(22)\ldots\ \frac{u\,\mathrm{Sin}\,w}{1+u\,\mathrm{Cos}\,w},\quad 1+2u\,\mathrm{Cos}\,w+u^2,\quad u^n\mathrm{Cos}\,nw \text{ et } u^n\mathrm{Sin}\,nw$$

ponatur $u=1$, sive unâ ponatur $u=-1$ et mutetur $w$ in $w+\pi$; per se patet de novâ hac positione non opus esse sigillatim disserere. —

2. Speciales jam considerentur positiones eædem, quarum in P. I:ma illata erat mentio. Et quidem

1:o)

Posito $v=o$,

ex supra allatis patet æquationes illas (II. A) veras esse non solum quoties $u$ numerice $<1$ sit, sed quoties — ut modo supra dicebatur — veræ sint æquationes ipsæ (II) generales. —

De cætero, illatâ positione $v=o$, æquationes (III) dant

$\mu$ positivâ atque, dum $w$ haud est formâ $\pm(2k+1)\pi$, $\mu$ reali quâlibet supra $-1$:

$$\text{(III.A)}\ldots\ldots\begin{cases} 2^{\mu}\operatorname{Cos}^{\mu}\left(\frac{W}{2}\right).\operatorname{Cos}\mu\left(\frac{W}{2}\right)=1+\sum_{n=1}^{n=\infty}S\,\mu_n\operatorname{Cos}n\,w\ , \\ 2^{\mu}\operatorname{Cos}^{\mu}\left(\frac{W}{2}\right).\operatorname{Sin}\mu\left(\frac{W}{2}\right)=\sum_{n=1}^{n=\infty}S\,\mu_n\operatorname{Sin}n\,w\ , \end{cases}$$

salvâ conditione ut, dum $\mu$ num. est integer $=m$, in membris posterioribus limes superior in ipsum $m$ mutetur: et quidem tunc loco $\frac{W}{2}$ arcum ipsum $\frac{w}{2}$ in membris prioribus substitui licebit*), ita ut $w$ arcu quolibet ex iis habeantur cognitæ illæ

$$(23)\ldots\ldots\begin{cases} 2^{m}\operatorname{Cos}^{m}\left(\frac{w}{2}\right).\operatorname{Cos}\frac{mw}{2}=1+\sum_{n=1}^{n=m}S\,m_n\operatorname{Cos}nw\ , \\ 2^{m}\operatorname{Cos}^{m}\left(\frac{w}{2}\right).\operatorname{Cos}\frac{mw}{2}=\sum_{n=1}^{n=m}S\,m_n\operatorname{Sin}n\,w\ , \end{cases}$$

---

*) Scilicet relatio illa $\frac{W}{2}=\operatorname{Arc}\operatorname{Tg}\left(\operatorname{Tg}\frac{w}{2}\right)$ indicat arcus illos $\frac{W}{2}$ et $\frac{w}{2}$ nonnisi quantitate formæ $\pm k\pi$ inter se discrepare: quod equidem discriminis genus efficit, ut producta illa

$$\operatorname{Cos}^{m}\left(\frac{W}{2}\right).\operatorname{Cos}m\left(\frac{W}{2}\right)\quad\text{et}\quad\operatorname{Cos}^{m}\left(\frac{W}{2}\right).\operatorname{Sin}m\left(\frac{W}{2}\right)$$

nullo modo a suo utrumque productorum

$$\operatorname{Cos}^{m}\left(\frac{w}{2}\right).\operatorname{Cos}\frac{mw}{2}\quad\text{et}\quad\operatorname{Cos}^{m}\left(\frac{w}{2}\right).\operatorname{Sin}\frac{mw}{2}$$

discrepent. —

in explicandas Dignitates $\mathrm{Cos}^{m}\left(\frac{w}{2}\right)$ secundum Cosinus et Sinus Multiplicium arcûs $\frac{w}{2}$ seu $w$ ipsius. —

Usus æquationum ipsarum (III. A) in explicandis Potentiis $\mathrm{Cos}^{\mu}\left(\frac{w}{2}\right)$ secundum Cos. et Sin. Multiplicium arcûs $\frac{w}{2}$, non modo dum $w$ numerice $<\pi$ est [et quidem tunc $\mu$ reali quâlibet supra $-1$] sed quoties $w$ haud limites $\pm\pi$ excedat [certe dum $\mu$ positiva est], jam est in propatulo. Scilicet iis convenienter, quæ paullo supra (in art. 1 præced.) monebantur, licebit, dum $w$ haud limites $\pm\pi$ superat, in membris prioribus loco $W$ ipsum $w$ substitui; — ideoque æquationes

$$(24)\ \ldots\ \begin{cases} 2^{\mu}\,\mathrm{Cos}^{\mu}\left(\frac{w}{2}\right).\mathrm{Cos}\,\frac{\mu w}{2} = 1 + \sum_{n=1}^{n=\infty} \mu_n \,\mathrm{Cos}\, n\, w \\ \text{et} \\ 2^{\mu}\,\mathrm{Cos}^{\mu}\left(\frac{w}{2}\right).\mathrm{Cos}\,\frac{\mu w}{2} = \sum_{n=1}^{n=\infty} \mu_n \,\mathrm{Sin}\, n\, w \end{cases}$$

valent non modo dum $w$ numerice $<\pi$ est et $\mu$ realis quælibet supra $-1$, sed etiam — certe dum $\mu$ positiva est — quoties $w$ limites $\pm\pi$ haud excedat. —

Quod ad Dignitates $\mathrm{Sin}^{m}\left(\frac{w}{2}\right)$ explicandas attinet, æquationes (23) — [mutato $\frac{w}{2}$ in $\frac{\pi - w}{2}$] — dant $w$ arcu quolibet cognitas illas

$$(23')\ldots\ldots\begin{cases} 2^m \operatorname{Sin}^m\left(\frac{w}{2}\right).\operatorname{Cos}\frac{m(\pi-w)}{2} = 1 - \sum_{n=1}^{n=m}(-1)^{n-1} m_n \operatorname{Cos} n w\ , \\ 2^m \operatorname{Sin}^m\left(\frac{w}{2}\right).\operatorname{Sin}\frac{m(\pi-w)}{2} = \sum_{n=1}^{n=m}(-1)^{n-1} m_n \operatorname{Sin} n w\ . \end{cases}$$

Consimilique ratione æquationes (24) — [mutato $\frac{w}{2}$ in $\frac{\pi-w}{2}$] — dant, in explicandas Potentias $\operatorname{Sin}^\mu\left(\frac{w}{2}\right)$, æquationes

$$(24')\ldots\ldots\begin{cases} 2^\mu \operatorname{Sin}^\mu\left(\frac{w}{2}\right).\operatorname{Cos}\mu\left(\frac{\pi-w}{2}\right) = 1 - \sum_{n=1}^{n=\infty}(-1)^{n-1}\mu_n \operatorname{Cos} n w \\ \text{et} \\ 2^\mu \operatorname{Sin}^\mu\left(\frac{w}{2}\right).\operatorname{Sin}\mu\left(\frac{\pi-w}{2}\right) = \sum_{n=1}^{n=\infty}(-1)^{n-1}\mu_n \operatorname{Sin} n w\ , \end{cases}$$

veras non modo dum $w$ positiva $<2\pi$ est et quidem $\mu$ realis quælibet supra $-1$, sed etiam — certe dum $\mu$ positiva est — quoties $w$ haud limites $o$ et $2\pi$ excedat. —

Prætercea jam omni absque negotio patet, quid in specie de æquationibus illis (II.A.a) et (II.A.b) sit adjiciendum, scil· veras eas esse non modo dum $u$ numerice $<1$ est ($\mu$ reali quâlibet) sed quoties $u$ numerice haud $>1$ sit, $\mu$ reali quâlibet supra $-1$: câ tamen adjectâ reservatione de priori illâ (II.A.a) ut finitâ quantitate ab $-1$ discrepet $u$ aut, sin minus, $\mu$ positiva sit quantitas; — ideoque haberi cognitas illas

$$(\text{III.A.a})\ldots\begin{cases} 2^\mu = 1 + \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \text{&c.} \ [\mu \text{ reali quâlibet supra } -1], \\ o = 1 - \mu_1 + \mu_2 - \mu_3 + \text{&c.} \ [\mu \text{ positivâ}], \end{cases}$$

$$(\text{III.A.b})\ldots\begin{cases} 2^{\frac{\mu}{2}}.\text{Cos}\frac{\mu\pi}{4} = 1-\mu_2+\mu_4+\mu_6+\text{ &c.} \\ 2^{\frac{\mu}{2}}.\text{Sin}\frac{\mu\pi}{4} = \mu_1-\mu_3+\mu_5-\text{ &c.} \end{cases} \quad [\mu \text{ reali quâlibet supra} -1];$$

tandemque functiones illas (II.A.b′) explicari licere secundum dignitates ipsius Tg$z$, non modo dum $z$ numerice $<\frac{\pi}{4}$ est ($\mu$ reali quâlibet) sed quoties $z$ numerice haud $>\frac{\pi}{4}$ sit, $\mu$ reali quâlibet supra $-1$. —

3. Priusquam ad cæteras, quarum in prima linea art. præcedentis facta erat mentio, positiones speciales progredimur, alium heic commemorari juvabit eundemque præcipue notabilem usum æquationum illarum (III. A). Quem in finem omnium primo Theorematis commoneri oportebit sequentis:

THEOR. V.

Si fuerit seriei terminus generalis positivus $f(n)$ ita comparatus, ut crescente $n$ indefinite $lim\, f(n)=o$ sit; ambæ series, quarum termini generales sunt

(25) . . . . . $f(n)\text{Sin}nw$ et $f(n)\text{Cos}nw$,

convergentes erunt arcu $w$ quolibet edito præter $\pm 2k\pi$ ($k$ num. int. aut $o$). —

Cui equidem Theoremati Cel:i Malmstén*) innixis nobis

*) Vid. Nova Acta Reg. Societ. Scient. Upsal. Vol. XII: "Note sur la con-

rem, de qua quæritur, jam facili negotio expedire licebit. Scilicet ex hoc Corollarii instar consequitur series illas

$$(26)\ \ldots\ldots \begin{cases} \operatorname{Sin} w,\ \frac{1}{2}\operatorname{Sin} 2w,\ \frac{1}{3}\operatorname{Sin} 3w,\ \&c. \\ \operatorname{Cos} w,\ \frac{1}{2}\operatorname{Cos} 2w,\ \frac{1}{3}\operatorname{Cos} 3w,\ \&c \end{cases}$$

---

vergence des séries, par C. J. Malmstén". Conf. Grunert's Archiv d. Math. u. Phys. Th. VI. pag. 58 seqq. (quo loco breviter hanc "Notam" ex Actis exscriptam promulgavit editor). — Verum quidem est in ipsum modum Theorematis hujusce l. c. demonstrandi animadverti quidquam jure licere, quippe cui non tam simplex quam par est reddita fuerit forma: scilicet solâ câ proprietate ipsius $f(n)$, quod $\lim f(n)=o$ est, innixam perfici licet demonstrationem; nec tamen nos decet de ea re hoc fusius disserere, et quidem duplici caussâ. Ipse enim Auctor is est, cui debemus nos admonitionem ineptæ quodammodo, quâ laborat demonstratio, formæ; nec id solum: nobis insuper ipsis nuper admodum contigit arguere Theorema hocce nonnisi Corollarium quoddam conficere Theorematis longe latius patentis hujusce:

THEOREMA.

Si fuerit serici terminus generalis positivus $f(n)$ ita comparatus, ut $n$ quodam ac quolibet majori permaneat

$(\iota)$ . . . . . $nf(n) \gtrless$ numero quodam edito $N$;

series, quarum termini generales confieiunt

productum ipsius $f(n)$. $\dfrac{\operatorname{Cos}\left(\operatorname{AreTg}\frac{\nu}{\varrho+1} + \operatorname{AreTg}\frac{\nu}{\varrho+2} + \ldots\ldots + \operatorname{AreTg}\frac{\nu}{\varrho+n}\right)}{\operatorname{Cos}\left(\operatorname{AreTg}\frac{\nu}{\varrho+1}\right)\operatorname{Cos}\left(\operatorname{AreTg}\frac{\nu}{\varrho+2}\right)\ldots\operatorname{Cos}\left(\operatorname{AreTg}\frac{\nu}{\varrho+n}\right)}$ per $\operatorname{Cos} n w$ aut $\operatorname{Sin} n w$

productum ipsius $f(n)$. $\dfrac{\operatorname{Sin}\left(\operatorname{AreTg}\frac{\nu}{\varrho+1} + \operatorname{AreTg}\frac{\nu}{\varrho+2} + \ldots\ldots + \operatorname{AreTg}\frac{\nu}{\varrho+n}\right)}{\operatorname{Cos}\left(\operatorname{AreTg}\frac{\nu}{\varrho+1}\right)\operatorname{Cos}\left(\operatorname{AreTg}\frac{\nu}{\varrho+2}\right)\ldots\operatorname{Cos}\left(\operatorname{AreTg}\frac{\nu}{\varrho+n}\right)}$ per $\operatorname{Cos} n w$ aut $\operatorname{Sin} n w$,

[$\varrho$ reali haud negativâ]

gentes erunt $\nu$ reali quàlibet et arcu $w$ quolibet edito præter $\pm 2k\pi$ ($k$ num. int. aut $o$).

**convergentes esse $w$ arcu quolibet edito præter $\pm 2k\pi$: cujus rei ipsius in proxime insequentibus præcipuus erit usus*). —**

---

Hoc ipsum est Theorema, cujus in fine art. 1. §:i 1 præced. et quidem verbis Theorema illud II subsequentibus mentionem fecimus: quibus præterea ex verbis caussam demonstrationis hujusce Theorematis heic prætermittendæ perspici licet. — Sufficit hoc loco admonere terminos generales $(\varkappa)$, posito $\nu=o$, in ipsos (25) abire et quidem nos insuper in Dissertatione loco cit. §:i 1 commemoratâ probavisse valere in hoc casu speciali theorema non modo dum satis est factum reservationi illi $(\iota)$, sed quoties $\lim f(n)=o$; — ex quibus patet Theorema illud V jure Corollarium quoddam novissimi hujus Theorematis universalis existimari oportere. —

Aliud insuper est Theorema quoddam, novissimo heic æque ac Theoremati illi II intimo nexu conjunctum, nec minoris illi ipsi momenti argumentum. — Qua de re totâ videre licet Dissertationem in fine art. 1 §:i 1 præced. commemoratam. —

*) Quid autem? aliunde jam pridem, ajunt, cognita hæc res est et quidem jam fere obsoleta! Quo tandem ex loco? nullo, opinor, nisi ex hoc ipso Theoremate, certe si ea — ut in tali re par est — excipias, quæ ope Integralium Definitorum indagari licuerit. Nam — ut veterum hujusce rei, sicuti totius fere serierum infinitarum, haud satis accuratas omittam commentationes — celari non potest nostri ævi Geometras materiem istam justo levius tractatam reliquisse. Unum vel alterum afferre juvat exemplum. — *Abel*, in pag. 89 Dissert. jam pluries commemoratæ, convergentiam seriei $\mathrm{Cos}\,\varphi$, $\frac{1}{2}\mathrm{Cos}\,2\varphi$, $\frac{1}{3}\mathrm{Cos}\,3\varphi$, &c. "pour toute valeur de $\varphi$ excepté pour $\varphi=\pm 2k\pi$" probaturus mirâ quâdam confusione satis sibi videtur fecisse allegato Theoremate suo II (pag. 68), notissimo inquam hocce: "Si dans une série de quantités positives $\varrho_0$, $\varrho_1$, $\varrho_2$, &c. le quotient $\frac{\varrho_{m+1}}{\varrho_m}$ pour des valeurs "toujours croissantes de $m$ s'approchent indéfiniment d'une limite $\alpha$, "qui est plus petite que 1, la série

$$\varepsilon_0\varrho_0\,,\quad \varepsilon_1\varrho_1\,,\quad \varepsilon_2\varrho_2\,,$$

"où $\varepsilon_0$, $\varepsilon_1$, $\varepsilon_2$, &c. sont des quant. qui ne surpassent pas l'unité, sera "nécessairement convergente." — Cel. Schlömilch in Handb. d. Mathem.

Ex æquationibus (III. A) habentur, $\mu$ positivâ atque $w$ arcu quolibet,

$$(27)..\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{2^{\mu}\,\mathrm{Cos}^{\mu}\left(\frac{W}{2}\right).\mathrm{Cos}\mu\left(\frac{W}{2}\right)-1}{\mu} = \mathrm{Cos}w - \dfrac{1-\mu}{2}\mathrm{Cos}2w + \dfrac{(1-\mu)(2-\mu)}{2\,.\,3}\mathrm{Cos}3w - \&c. \\ \dfrac{2^{\mu}\,\mathrm{Cos}^{\mu}\left(\frac{W}{2}\right).\mathrm{Sin}\mu\left(\frac{W}{2}\right)}{\mu} = \mathrm{Sin}\,w - \dfrac{1-\mu}{2}\mathrm{Sin}\,2w + \dfrac{(1-\mu)(2-\mu)}{2\,.\,3}\mathrm{Sin}3\,w - \&c. \end{array}\right.$$

---

Anal. 1:er Th. (1845) pag. 225, quamquam non tam manifesto in errore deprehendi eum liceat, argumentatione tamen incertæ admodum fidei usus rem totam in integro reliquit. Scilicet apud eum (pag. cit. 225) totius rei cardo in eo vertitur, quod "das "Binomialtheorem gilt auch dann noch für $x=\pm 1$, wenn die Grösse $\mu$ n $(1+x)^{\mu}$ keine negativen Werthe annimmt": ex quo concludi sibi licere statuit ratiocinationem quamdam præcedentem, in qua posita erat $\mu$ indefinite in $o$ (ex plagâ positivâ) convergere [$x$ reali numerice $<1$], veram esse etiamsi $x=\pm 1$ fuerit. At nusquam tamen in antecedentibus ille probaverat valere theorema Binomiale pro $x=\pm 1$, $\mu$-valoribus positivis indefinite ad $o$ propinquis. Etenim apud eum demonstratio convergentiæ seriei $1,\ \mu_1 x,\ \mu_2 x^2,\ \mu_3 x^3$, &c. pro $x=\pm 1$, $\mu$ positivâ, in pag. 119 et 120 occurrit et quidem in eo innititur, quod series illa

$$(\mu)\ \ldots\ldots\ \frac{p-\mu}{p+1},\ \frac{(p-\mu)(p-\mu+1)}{(p+1)(p+2)},\ \frac{(p-\mu)(p-\mu+1)(p-\mu+2)}{(p+1)\ (p+2)\ (p+3)},\ \&c.\ [p \text{ num. int. proxime} > \mu],$$

convergens est, quoniam $p+1 > p-\mu+1$, eam ob caussam quod ex antea probatis (pag. 115) habetur

$$(\nu)\ \ldots\ldots\ \frac{\alpha}{\beta}+\frac{\alpha(\alpha+\gamma)}{\beta(\beta+\gamma)}+\frac{\alpha(\alpha+\gamma)(\alpha+2\gamma)}{\beta(\beta+\gamma)(\beta+2\gamma)}+\&c. = \frac{\alpha}{\beta-(\alpha+\gamma)},\ \text{dum } \beta > \alpha+\gamma \text{ est},$$

et quidem $p+1$ et $p-\mu+1$ in serie $(\mu)$ locum occupant numerorum $\beta$ et $\alpha+\gamma$ in æqu. $(\nu)$. — At quid? si $\mu$ indefinite ad $o$ propinqua seu, quod idem valet, si $\beta$ indefinite ad $\alpha+\gamma$ propinqua ponatur, quis est qui non videat totam hanc ratiocinationem in incassum abire! —

In eo igitur cardine vertitur præcipuus Celi Schlömilch error, quod a prin-

Jam quoniam, $w$ quolibet edito præter $\pm(2k+1)\pi$, series membr. posteriorum convergentes permanent (vi eorum quæ de æqu. ipsis (III. A) dicebantur), etiamsi $\mu$ positiva indefinite in $o$ convergere ponatur, nec non [vi Theorem. V] in ipso limite $\mu=o$: atque insuper priora hæc membra talia sunt ut, arcu $W$ quolibet inter limites $\pm\pi$ (exclus.), convergente $\mu$ in-

---

cipio haudquaquam probato profectus est: scilicet apud eum nusquam probata est series binomialis pro $x=\pm 1$ convergens permanere, $\mu$-valoribus positivis indefinite exiguis, nec omnino probari potest pro $x=-1$ (ut ex art. 4 §:i 1 præced. perlucet). — At quid? si illi concedatur valere theorema binomiale pro $x=+1$ et $\mu$-valoribus positivis indefinite exiguis — id quod reverà ex supra allatis licitum est —; quid est quod apud eum nusquam Theoremate illo V opus esse videatur? Idem hoc est ac interrogare, an reverà nobis heic supra in deducendis æquationibus (29) opus fuerit hoc theoremate. Opus hoc esse, si eam potissimum, quam nos huc loco ingressi fuimus, viam deductionis ut commodam ita omni objectione liberam persequi placeat, non est dubitandum. Sed adjectâ monitione eâ, quod reverà valent æquationes (27) $\mu$-valoribus positivis indefinite exiguis [si modo evitentur $w$-valores formæ $\pm(2k+1)\pi$]; numne tunc per se patet, et quidem omni posthabitâ curâ Theorematis V, valere easdem in limite ipso $\mu=o$ ideoque veras esse æquat. (29) ipsas? Aut, quo rem potius totam uno ictu feriamus, si probata fuerit æquatio illa (12) vera esse $u$ quâlibet reali [ab $u_0$ quodam] usque ad $U$ (exclus.), etiamsi $u$-valores indefinite ad $U$ propinqui considerentur, atque si insuper termini membri posterioris æque ac ipsa $F(u)$, convergente $u$ indefinite in $U$ (ab $u_0$-plaga inde), omnes in suum quæque limitem $f_1(U)$, $f_2(U)$, $f_3(U)$, &c. atque $F(U)$ finitum determinatumque indefinite contendant; num prætermissâ omni curâ examinandi, an reverâ convergens sit series ipsa $f_1(U)$, $f_2(U)$, $f_3(U)$, &c, pro certo statui liceat valere æquationem

$(o)$ . . . . . $F(U)=f_1(U)+f_2(U)+f_3(U)+$ &c. ? —

Res quidem omnem præ se fert veri speciem; sed tamen antequam vera fuerit probata — et quonam id modo perfici licebit? — potiori jure hanc viam haud satis munitam haberi oportebit. —

definite in $o$ habeantur finiti determinatique

$$(28)\ldots\begin{cases}\lim\dfrac{2^{\mu}\mathrm{Cos}^{\mu}\left(\frac{W}{2}\right).\mathrm{Cos}\mu\left(\frac{W}{2}\right)-1}{\mu}=\lim\dfrac{e^{\mu[\log 2+\log\mathrm{Cos}\frac{W}{2}]}-1}{\mu}=\log 2+\log\mathrm{Cos}\dfrac{W}{2}\ ;\\ \lim\dfrac{2^{\mu}\mathrm{Cos}^{\mu}\left(\frac{W}{2}\right).\mathrm{Sin}\mu\left(\frac{W}{2}\right)}{\mu}=\lim\dfrac{2^{\mu}\mathrm{Cos}^{\mu}\left(\frac{W}{2}\right).\mathrm{Sin}\mu\left(\frac{W}{2}\right)}{\mu\left(\frac{W}{2}\right)}\cdot\dfrac{W}{2}=\dfrac{W}{2}\ ;\end{cases}$$

consequitur ex iis, quæ in 1:o) §:i 2 præced. allata sunt, pro certo statui licere $w$ quolibet edito præter $\pm(2k+1)\pi$ esse

$$(29)\ldots\begin{cases}\log 2+\log\mathrm{Cos}\dfrac{W}{2}=\mathrm{Cos}w-\dfrac{1}{2}\mathrm{Cos}2w+\dfrac{1}{3}\mathrm{Cos}3w-\&c.\\ \dfrac{W}{2}\ \text{i. e.}\ \mathrm{ArcTg}\left(\mathrm{Tg}\dfrac{w}{2}\right)=\mathrm{Sin}w-\dfrac{1}{2}\mathrm{Sin}2w+\dfrac{1}{3}\mathrm{Sin}3w-\&c.\end{cases}$$

Posito in his $w+\pi$ loco $w$, quoniam $\mathrm{ArcTg}\left(\mathrm{Tg}\dfrac{\pi+w}{2}\right)=$ $=-\mathrm{ArcTg}\left(\mathrm{Cot}\dfrac{w}{2}\right)$ ideoque $\mathrm{CosArcTg}\left(\mathrm{Tg}\dfrac{\pi+w}{2}\right)=\sqrt{\mathrm{Sin}^{2}\dfrac{w}{2}}=$ $=\sqrt{\mathrm{Sin}^{2}\left(\dfrac{W}{2}\right)}$, habentur $w$ quolibet edito præter $\pm 2k\pi$:

$$(30)\ldots\begin{cases}\log\dfrac{1}{2}-\log\sqrt{\mathrm{Sin}^{2}\left(\dfrac{W}{2}\right)}=\mathrm{Cos}w+\dfrac{1}{2}\mathrm{Cos}2w+\dfrac{1}{3}\mathrm{Cos}3w+\&c.\\ \mathrm{ArcTg}\left(\mathrm{Cot}\dfrac{W}{2}\right)=\mathrm{Sin}w+\dfrac{1}{2}\mathrm{Sin}2w+\dfrac{1}{3}\mathrm{Sin}3w+\&c.\end{cases}$$

tandemque (addendo), $w$ quolibet edito præter $\pm k\pi$:

$$(31)\ldots\ \begin{cases} \frac{1}{2}\log\sqrt{\mathrm{Cot}^2\left(\frac{W}{2}\right)} = \mathrm{Cos}w + \frac{1}{3}\mathrm{Cos}3w + \frac{1}{5}\mathrm{Cos}5w + \&c. \\ \frac{\mathrm{ArcTg}\left(\mathrm{Tg}\frac{w}{2}\right) + \mathrm{ArcTg}\left(\mathrm{Cot}\frac{w}{2}\right)}{2} = \mathrm{Sin}w + \frac{1}{3}\mathrm{Sin}3w + \frac{1}{5}\mathrm{Sin}5w + \&c. \end{cases}$$

et quidem facile est expertu, prius hoc membrum novissimum æquivalere

$$\begin{cases} \frac{\pi}{4}, \text{ dum } \frac{w}{2} \text{ in 1:o) aut 3:o) quadrante desinit,} \\ \text{at} \\ -\frac{\pi}{4}, \text{ dum in 2:o) aut 4:o),} \end{cases}$$

sive positiva sit sive negativa $w$. —

In specie habentur ex his (29)—(31), dum $\frac{w}{2}$ haud limites $\pm\frac{\pi}{2}$ excedit, sequentes:

$$(29')\ldots\ \begin{cases} \log 2 + \log\mathrm{Cos}\frac{w}{2} = \mathrm{Cos}w - \frac{1}{2}\mathrm{Cos}2w + \frac{1}{3}\mathrm{Cos}3w - \&c. \\ [\pi > w > -\pi] \\ \frac{w}{2} = \mathrm{Sin}w - \frac{1}{2}\mathrm{Sin}2w + \frac{1}{3}\mathrm{Sin}3w - \&c. \end{cases}$$

$$(30')\ldots\begin{cases}\log\frac{1}{2}-\log\operatorname{Sin}\frac{w}{2}=\operatorname{Cos}w+\frac{1}{2}\operatorname{Cos}2w+\frac{1}{3}\operatorname{Cos}3w+\&c. \\ \qquad\qquad [\pi\geq w>o] \\ \frac{\pi-w}{2}=\operatorname{Sin}w+\frac{1}{2}\operatorname{Sin}2w+\frac{1}{3}\operatorname{Sin}3w+\&c.\end{cases}$$

$$\begin{cases}\log\frac{1}{2}-\log\sqrt{\operatorname{Sin}^2\frac{w}{2}}=\operatorname{Cos}w+\frac{1}{2}\operatorname{Cos}2w+\frac{1}{3}\operatorname{Cos}3w+\&c. \\ \qquad\qquad [o>w\geq-\pi] \\ -\frac{\pi+w}{2}=\operatorname{Sin}w+\frac{1}{2}\operatorname{Sin}2w+\frac{1}{3}\operatorname{Sin}3w+\&c.\end{cases}$$

$$(31')\ldots\begin{cases}\frac{1}{2}\log\operatorname{Cot}\frac{w}{2}=\operatorname{Cos}w+\frac{1}{3}\operatorname{Cos}3w+\frac{1}{5}\operatorname{Cos}5w+\&c. \\ \qquad\qquad [\pi>w>o] \\ \frac{\pi}{4}=\operatorname{Sin}w+\frac{1}{3}\operatorname{Sin}3w+\frac{1}{5}\operatorname{Sin}5w+\&c.\end{cases}$$

$$\begin{cases}\frac{1}{2}\log\sqrt{\operatorname{Cot}^2\frac{w}{2}}=\operatorname{Cos}w+\frac{1}{3}\operatorname{Cos}3w+\frac{1}{5}\operatorname{Cos}5w+\&c. \\ \qquad\qquad [o>w>-\pi] \\ -\frac{\pi}{4}=\operatorname{Sin}w+\frac{1}{3}\operatorname{Sin}3w+\frac{1}{5}\operatorname{Sin}5w+\&c.\end{cases}$$

tandemque notissimæ

$$(29'')\ldots\ldots\begin{cases}\log 2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\&c. \\ \frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\&c.\end{cases}$$

4. Progrediamur jam ad positionem illam

$$2:o)$$
$$\mu=o\ .\ —$$

Ex allatis in art. 1 de veritate æquat. (II) generalium pa-

tet valere æquationes illas (II.B), $v$ reali qualibet, non modo dum $u$ numerice $<1$ est, sed quoties $u$ numerice haud $>1$ sit certe dum $u\,\mathrm{Cos}\,w$ finità quant. ab $-1$ discrepat. —

De cætero, illatà positione $\mu=o$, æquationes (III) — salvà conditione post eas expositâ — reductionibus quibusdam levioribus perfectis novas dant hasce:

$$(\mathrm{III.B})\ldots\begin{cases} e^{-v\left(\frac{w}{2}\right)}\,\mathrm{Cos}\log\left[2^{v}\,\mathrm{Cos}^{v}\left(\frac{w}{2}\right)\right]= \\ \\ =1-v.\left\{\mathrm{Sin}\,w-\sum_{n=1}^{n=\infty}(-1)^{n+1}\,\frac{\sqrt{\left(1+\frac{v^2}{1^2}\right)\left(1+\frac{v^2}{2^2}\right)\ldots\ldots\left(1+\frac{v^2}{n^2}\right)}}{n+1}\,\mathrm{Sin}\left((n+1)w-\mathrm{A.Tg}\frac{v}{1}-\mathrm{A.Tg}\frac{v}{2}-\ldots\ldots-\mathrm{A.Tg}\right)\right\} \\ \\ e^{-v\left(\frac{w}{2}\right)}\,\mathrm{Sin}\log\left[2^{v}\,\mathrm{Cos}^{v}\left(\frac{w}{2}\right)\right]= \\ \\ =v.\left\{\mathrm{Cos}\,w-\sum_{n=1}^{n=\infty}(-1)^{n+1}\,\frac{\sqrt{\left(1+\frac{v^2}{1^2}\right)\left(1+\frac{v^2}{2^2}\right)\ldots\ldots\left(1+\frac{v^2}{n^2}\right)}}{n+1}\,\mathrm{Cos}\left((n+1)w-\mathrm{A.Tg}\frac{v}{1}-\mathrm{A.Tg}\frac{v}{2}-\ldots-\mathrm{A.T}\right)\right\} \end{cases}$$

quæ igitur ambæ valent $w$ arcu quolibet edito præter $\pm(2k+1)\pi$, $v$ reali quàlibet. —

Præterea jam omni absque negotio patet, quid in specie de æquationibus illis (II.B.a) et (II.B.b) sit adjiciendum, scil. veras eas esse non modo dum $u$ numerice $<1$ est, sed quoties $u$ numerice haud $>1$ sit: eà tamen adjectà reservatione de æqu.

(II.B.a) ut finità quant. ab —1 discrepet $u$; — ideoque haberi, $v$ reali quàlibet,

$$(\text{II.B.a})\ldots\begin{cases}\operatorname{Coslog2}^{v}=1-v.\sum_{n=1}^{n=\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{\sqrt{\left(1+\frac{v^2}{1^2}\right)\left(1+\frac{v^2}{2^2}\right)\ldots\ldots\left(1+\frac{v^2}{n^2}\right)}}{n+1}\operatorname{Sin}\left(\operatorname{A.Tg}\frac{v}{1}+\operatorname{A.Tg}\frac{v}{2}+\ldots+\operatorname{A.Tg}\frac{v}{n}\right),\\ \quad=1-v.\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n+1}\cdot\frac{\operatorname{Sin}\left(\operatorname{A.Tg}\frac{v}{1}+\operatorname{A.Tg}\frac{v}{2}+\ldots\ldots+\operatorname{A.Tg}\frac{v}{n}\right)}{\operatorname{Cos}\left(\operatorname{A.Tg}\frac{v}{1}\right)\operatorname{Cos}\left(\operatorname{A.Tg}\frac{v}{2}\right)\ldots\operatorname{Cos}\left(\operatorname{A.Tg}\frac{v}{n}\right)};\\ \operatorname{Sinlog2}^{v}=v.\left\{1-\sum_{n=1}^{n=\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{\sqrt{\left(1+\frac{v^2}{1^2}\right)\left(1+\frac{v^2}{2^2}\right)\ldots\ldots\left(1+\frac{v^2}{n^2}\right)}}{n+1}\operatorname{Cos}\left(\operatorname{A.Tg}\frac{v}{1}+\operatorname{A.Tg}\frac{v}{2}+\ldots+\operatorname{A.Tg}\frac{v}{n}\right)\right\};\\ \quad=v.\left\{1-\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n+1}\cdot\frac{\operatorname{Cos}\left(\operatorname{A.Tg}\frac{v}{1}+\operatorname{A.Tg}\frac{v}{2}+\ldots\ldots+\operatorname{A.Tg}\frac{v}{n}\right)}{\operatorname{Cos}\left(\operatorname{A.Tg}\frac{v}{1}\right)\operatorname{Cos}\left(\operatorname{A.Tg}\frac{v}{2}\right)\ldots\operatorname{Cos}\left(\operatorname{A.Tg}\frac{v}{n}\right)}\right\};\end{cases}$$

non

$$(\text{II.b})\ldots\begin{cases}e^{-\frac{v\pi}{4}}\cdot\operatorname{Coslog2}^{\frac{v}{2}}=1-v.\left\{1+\sum_{n=1}^{n=\infty}\dfrac{\sqrt{\left(1+\frac{v^2}{1^2}\right)\left(1+\frac{v^2}{2^2}\right)\ldots\ldots\left(1+\frac{v^2}{n^2}\right)}}{n+1}\operatorname{Sin}\left((n+1)\frac{\pi}{2}+\operatorname{A.Tg}\frac{v}{1}+\operatorname{A.Tg}\frac{v}{2}+\ldots\right.\right.\\ \qquad\qquad\left.\left.\ldots\ldots+\operatorname{A.Tg}\frac{v}{n}\right)\right\},\\ e^{-\frac{v\pi}{4}}\cdot\operatorname{Sinlog2}^{\frac{v}{2}}=-v.\sum_{n=1}^{n=\infty}\dfrac{\sqrt{\left(1+\frac{v^2}{1^2}\right)\left(1+\frac{v^2}{2^2}\right)\ldots\ldots\left(1+\frac{v^2}{n^2}\right)}}{n+1}\operatorname{Cos}\left((n+1)\frac{\pi}{2}+\operatorname{A.Tg}\frac{v}{1}+\operatorname{A.Tg}\frac{v}{2}+\ldots\ldots+\operatorname{A.Tg}\frac{v}{n}\right)\right\};\end{cases}$$

tandemque functiones illas (II. B. b′) explicari licere secund. dignitates ipsius $\mathrm{Tg}\,z$, quoties $z$ numerice haud $> \frac{\pi}{4}$ sit: et quidem pos. $z = \frac{\pi}{4}$ æquationes (II.B.b′) in novissimas ipsas (III.B.b) abeunt. —

*Nota.* Ex æquationibus (III.B) eodem modo ac in art. 3 præcedente æqu. (III.A) tractatis — si modo ea, quæ in art. 3 de $\mu$ dicebantur, heic ad $\nu$ accommodentur — concludi licet hac quoque viâ æquationes illas (29) vi relationum

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\Pi'}{2} = \lim \dfrac{1 - e^{-\nu\left(\frac{\Pi'}{2}\right)} \mathrm{Cos}\left[\nu \log\left(2\mathrm{Cos}\dfrac{\Pi'}{2}\right)\right]}{\nu} \\ \text{et} \\ \log\left(2\mathrm{Cos}\dfrac{\Pi'}{2}\right) = \lim \dfrac{e^{-\nu\left(\frac{\Pi'}{2}\right)} \mathrm{Sin}\left[\nu \log\left(2\mathrm{Cos}\dfrac{\Pi'}{2}\right)\right]}{\nu} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \nu \text{ indefinite in} \\ o \text{ convergente.} \end{array}$$

5. Consideratis jam modo in principio §:i hujus 5:i indicato et æquationibus ipsis (II) generalibus et speciebus earum (II. A) unà cum (II. B), reliquum est ut æquali modo tractentur cæteræ (II. C) et (II. D). Et quidem ex allatis in art. 1 de veritate æqu. (II) generalium absque negotio patet valere has (II. C) et (II. D) non solum

1:o) quoties $u$ numerice $< 1$ sit;

sed

2:o) quoties $u$ numerice haud $<1$ sit,

*a*) dum $\mu$ positiva est quantitas,

quin etiam

*b*) $\mu$ reali quâlibet supra $-1$, certe nisi in æquat. (II. C.) ponatur $u$ indefinite ad $-1$ propinqua,

appositâ præterea conditione illâ de $\mu$ num. integro aut *o*. — De cætero quod ad formam harum æquationum positâ $u=\pm 1$ attinet, absque ambagibus liquet ex æqu. (II. C) comparari:

*a*) positâ $u=1$:

$$2^{\mu}\,\mathrm{Coslog}\,2^{\nu}=1+\sum_{n=1}^{n=\infty}\mu_n\sqrt{\left[1+\left(\frac{\nu}{\mu}\right)^2\right]\left[1+\left(\frac{\nu}{\mu-1}\right)^2\right]\ldots\ldots\left[1+\left(\frac{\nu}{\mu-n+1}\right)^2\right]}.\mathrm{Cos}\left(\mathrm{A.Tg}\frac{\nu}{\mu}+\mathrm{A.Tg}\frac{\nu}{\mu-1}+\ldots\ldots+\mathrm{A.Tg}\frac{\nu}{\mu-n+1}\right),$$

$$=1+\sum_{n=1}^{n=\infty}\mu_n\frac{\mathrm{Cos}\left(\mathrm{A.Tg}\frac{\nu}{\mu}+\mathrm{A.Tg}\frac{\nu}{\mu-1}+\ldots\ldots\ldots+\mathrm{A.Tg}\frac{\nu}{\mu-n+1}\right)}{\mathrm{Cos}\left(\mathrm{A.Tg}\frac{\nu}{\mu}\right)\mathrm{Cos}\left(\mathrm{A\,Tg}\frac{\nu}{\mu-1}\right)\ldots\ldots\mathrm{Cos}\left(\mathrm{A.Tg}\frac{\nu}{\mu-n+1}\right)},$$

$$2^{\mu}\,\mathrm{Sinlog}\,2^{\nu}=\sum_{n=1}^{n=\infty}\mu_n\sqrt{\left[1+\left(\frac{\nu}{\mu}\right)^2\right]\left[1+\left(\frac{\nu}{\mu-1}\right)^2\right]\ldots\ldots\left[1+\left(\frac{\nu}{\mu-n+1}\right)^2\right]}.\mathrm{Sin}\left(\mathrm{A.Tg}\frac{\nu}{\mu}+\left(\mathrm{A.Tg}\frac{\nu}{\mu-1}+\ldots\ldots\right.\right.$$

$$\left.\left.\ldots\ldots+\mathrm{A.Tg}\frac{\nu}{\mu-n+1}\right),\right.$$

$$=\sum_{n=1}^{n=\infty}\mu_n\frac{\mathrm{Sin}\left(\mathrm{A.Tg}\frac{\nu}{\mu}+\mathrm{A.Tg}\frac{\nu}{\mu-1}+\ldots\ldots\ldots+\mathrm{A.Tg}\frac{\nu}{\mu-n+1}\right)}{\mathrm{Cos}\left(\mathrm{A.Tg}\frac{\nu}{\mu}\right)\mathrm{Cos}\left(\mathrm{A.Tg}\frac{\nu}{\mu-1}\right)\ldots\ldots\mathrm{Cos}\left(\mathrm{A.Tg}\frac{\nu}{\mu-n+1}\right)},$$

quæ igitur ambæ valent $\mu$ reali quàlibet supra $-1$ (salvâ conditione illâ de $\mu$ num. int. aut $o$) atque $\nu$ reali quàlibet; —

*b*) positâ $u = -1$ : haberi, $\mu$ positivâ,

$$(\mathbf{III.C''})\ldots\begin{cases} o = 1 + \overset{n=\infty}{\underset{n=1}{\mathbf{S}}} (-1)^n \mu_n \sqrt{\left[1+\left(\frac{\nu}{\mu}\right)^2\right]\left[1+\left(\frac{\nu}{\mu-1}\right)^2\right]\ldots\ldots\left[1+\left(\frac{\nu}{\mu-n+1}\right)^2\right]}\,.\,\mathrm{Cos}\left(\mathrm{A.Tg}\frac{\nu}{\mu}+\mathrm{A.Tg}\frac{\nu}{\mu-1}+\ldots\right. \\ \qquad\qquad \left.\ldots\ldots+\mathrm{A.Tg}\frac{\nu}{\mu-n+}\right) \\ o = \overset{n=\infty}{\underset{n=1}{\mathbf{S}}} (-1)^n \mu_n \sqrt{\left[1+\left(\frac{\nu}{\mu}\right)^2\right]\left[1+\left(\frac{\nu}{\mu-1}\right)^2\right]\ldots\ldots\left[1+\left(\frac{\nu}{\mu-n+1}\right)^2\right]}\,.\,\mathrm{Sin}\left(\mathrm{A.Tg}\frac{\nu}{\mu}+\mathrm{A.Tg}\frac{\nu}{\mu-1}\ldots\right. \\ \qquad\qquad \left.\ldots\ldots+\mathrm{A.Tg}\frac{\nu}{\mu-\nu-}\right) \end{cases}$$

Per se patet, si in his (C′) et (C″) poneretur $\nu = o$, recuperaturos nos fore æquationes (III. A. a): nec non positâ $\mu = o$ in (C′), reconciliari (III. B. a). —

Si quoque, pos. $u = \pm 1$ *), ex æquationibus (II. D.) comparantur memorabiles istæ:

---

*) Scilicet idem resultat, sive in æquat. (II. D) $u = +1$ ponatur sive positâ $u = -1$ permutetur $\nu$ in $-\nu$, — ut facile patet. —

$$e^{\frac{\mu\log 2-\nu\cdot\frac{\pi}{2}}{2}}\cdot\operatorname{Cos}\left(\frac{\nu\log 2+\mu\cdot\frac{\pi}{2}}{2}\right)=$$

$$=1+\sum_{n=1}^{n=\infty}\mu_n\sqrt{\left[1+\left(\frac{\nu}{\mu}\right)^2\right]\left[1+\left(\frac{\nu}{\mu-1}\right)^2\right]\cdots\left[1+\left(\frac{\nu}{\mu-n+1}\right)^2\right]}\cdot\operatorname{Cos}\left(\frac{n\pi}{2}+\operatorname{A.Tg}\frac{\nu}{\mu}+\operatorname{A.Tg}\frac{\nu}{\mu-1}+\cdots\right.$$
$$\left.\cdots+\operatorname{A.Tg}\frac{\nu}{\mu-n+1}\right),$$

$$e^{\frac{\mu\log 2-\nu\cdot\frac{\pi}{2}}{2}}\cdot\operatorname{Sin}\left(\frac{\nu\log 2+\mu\cdot\frac{\pi}{2}}{2}\right)=$$

$$=\sum_{n=1}^{n=\infty}\mu_n\sqrt{\left[1+\left(\frac{\nu}{\mu}\right)^2\right]\left[1+\left(\frac{\nu}{\mu-1}\right)^2\right]\cdots\left[1+\left(\frac{\nu}{\mu-n+1}\right)^2\right]}\cdot\operatorname{Sin}\left(\frac{n\pi}{2}+\operatorname{A.Tg}\frac{\nu}{\mu}+\operatorname{A.Tg}\frac{\nu}{\mu-1}+\cdots\right.$$
$$\left.\cdots+\operatorname{A.Tg}\frac{\nu}{\mu-n+1}\right);$$

quæ igitur ambæ valent $\mu$ reali quâlibet supra $-1$ (salvâ conditione solitâ de $\mu$ num. integro aut $o$) et $\nu$ reali quâlibet atque, si in iis ponantur successive $\nu=o$ et $\mu=o$, æquationes illas (III. A. b) et (III. B. b) reconciliant. —

Denique jam vi supra allatorum patet veras esse æquationes illas (II. D′), non modo dum $z$ numerice $<\frac{\pi}{4}$ est, sed — subjectâ conditione ut $\mu$ ipsam $-1$ superet — quoties $z$ numerice haud $>\frac{\pi}{4}$ sit, easdemque pos. $z=\pm\frac{\pi}{4}$ in ipsas (III.D) abire. —

*Nota.*

Convenienter iis, quæ in "Nota" sub fine §:i 1 præced. monebantur, pro certo statui licet, dum $u$ numerice $=1$ est, divergentes esse ambas æquationes (II)

*a*) quoties $\mu$ negativa numerice $\geqq 1$ sit,

*b*) dum $u\,\mathrm{Cos}\,w = -1$ est, etiamsi $\mu = o$ aut negativa $< 1$ fuerit,

$\nu$ positivâ æque ac negativâ; — atque, si $\nu = o$ fuerit, alterutram certe divergentem esse [vi art. 5. §:i 1:i]

*a*) quoties $\mu$ negativa numerice $\geqq 1$ sit,

*b*) dum $u\,\mathrm{Cos}\,w = -1$ est, $\mu$ negativâ quâlibet:

id quod novissimum igitur valet de seriebus terminorum generalium

$$\mu_n \mathrm{Cos}\, n w \quad \text{et} \quad \mu_n \mathrm{Sin}\, n w$$

nec non de seriebus term. generalium

$$(1-)^n \mu_n \mathrm{Cos}\, n w \quad \text{et} \quad (-1)^n \mu_n \mathrm{Sin}\, n w. \; —$$

# TUMOR SANGUINEUS

## IN REGIONE INGUINALI SINISTRA,

DESCRIPTUS

A

**C. H. BERGSTRAND.**

Ille morbi casus, quem nunc descripturi sumus, fortasse ob raritatem non est indignus, qui referatur.

Rusticus quidam, quadraginta annos natus, 2 Mart. 1845 in Nosocomium Academiae Upsaliensis receptus est. Laborabat tumore, caput infantis recens nati ad magnitudinem aequante, in latere interiore femoris sinistri et in suprema quidem parte sito. Eaque pars integumentorum communium, quibus tumor ille tectus erat, plane solitum habebat colorem. Tumor autem ante quattuor demum proximos annos comparere coeperat. Haud segniter igitur in tantam, quanta tum apparebat, creverat magnitudinem. Numquam dolorem ad tactum moverat, quamquam ad frigus æger, ut monuit, dolorem quendam senserat. Forma autem tumoris illam coni, apice deorsum spectante, quodam modo referebat. Superficies ejus erat non perfecte plana, nam

paucæ quaedam eminentiæ et loci depressiores animadverti poterant; et in anteriore interioreque parte erat locus, qui ante ceteram superficiem aliquantulum promineret, sed in quo liceret digito longius penetrare, quam alio quolibet loco, et ubi sensus praeberetur quasi foraminis ejus membranae, quae sub cute erat tumoris integumentum. Quibus autem foramen definitum erat marginibus, ii, quantum licebat per tactum rem cognoscere, ex fibris satis validis constare videbantur, ex quo conjici poterat, membranam illam satis firmam esse ac tenacem. In tumore autem non deerat fluctuatio, quae tamen ut animadverteretur, diligenti opus erat exploratione. In infima quidem parte nonnulla sentiebatur pulsatio, etsi adeo levis, ut solum ex ramis arteriarum cutis oriri videretur. Tumor autem non nimis erat ulli puncto adfixus, quamobrem vel sursum vel in utrumque latus nonnihil moveri poterat.

Vir ille, qui firmo erat corpore eaque specie, quae bonam testaretur valitudinem, non potuit recordari, se ullis, gravioribus certe, affectum fuisse morbis internis; quamquam idem commemoravit, anno jam 1824 sub ipso senistro genu in anteriore interioreque cruris parte, comparuisse tumorem, qui, quum perpetuo per quadriennium auxisset, in eandem fere creverit magnitudinem, quanta erat tumoris, de quo nunc loquimur. Uterque autem tumor, quantum vir noster existimare se posse sibi videbatur, ceteris quoque rationibus inter se similes erant, eo uno excepto, quod prior ille nonnullum doloris sensum attulisset. Ceterum in illo haud leve sanguinis profluvium consecutum erat — ex occasione externa, an non, id

vir ipse pro certo dicere non poterat — tumore parte inferiore quasi rupto, ex quo sangvis proruperat, nec prius manare desierat, quam profluvium compressione impediretur. (Quae quum audissemus, opinabamur, vas sanguiferum aliquod in integumentis, varicem forsitan, ruptum esse, ex eoque ortum sanguinis profluvium; quamquam postea sane in aliam sententiam adducti sumus.) Non multo post profluvium illud vir noster cel. Professorem Romanson consuluit, qui tumorem exstirpavit. Quo autem loco operatio (anno 1828) facta erat, longa videbatur cicatrix. De contento autem tumoris ex tanto temporis intervallo nihil certi referri potuit.

Diagnosis non facilis erat. Suberat quidem causa existimandi, tumorem esse cysticum, etsi foramen, quod sentiri videbatur, si cysticus esset, insolitum haberi oportebat. At quum recordaremur, nos complures ante annos in Nosocomio Regio Holmiensi exstirpasse aliquot permagna Lipomata, et post operationem in medio Lipomate humorem syrupi similem bis invenisse, non poteramus fidei absonum judicare, præsentem morbi casum in numerum illorum esse referendum. Ceterum, utut res se habebat, tamen in aperto erat, quid faciendum esset: patebat, tumorem esse exstirpandum.

Operatio die sexto Martis peracta est. Incisionibus duabus curvis in parte tumoris anteriore ita factis, ut hinc ab eodem puncto inciperent, illinc in eodem finirentur, id est, ad basim et ad apicem, exstitit ellipsis, quae tantam circuiret cutis par-

tem, quanta ad vulnus obtegendum supervacanea videretur. Deinde solita dissectione tumorem separavimus ab reliqua cute, qua tegebatur, itemque ab fascia latá; sed, quum aponeurosis ac tumor firmissime inter se cohaererent, atque illa, ut semper natura fert, in interiore femoris latere tenuis esset, accidit, ut aliquot femoris musculi nudarentur. Accidit autem simul alia res eaque majoris momenti. Nam etsi dissectio propter vicinitatem organorum, quorum læsio est periculosa, lente cauteque fieri debebat, et separatio tumoris ex parte manubrio scalpelli peragebatur et unguibus, tamen evitari non poterat, quin vena saphena magna abscinderetur. Atque abscissum est illud quidem magnum vas proxime ad illud punctum, quo in venam cruralem intrat. Fluxum sanguinis vehementissimum ligatura mox stitimus. Tumore autem plane exstirpato, duas minores arterias ligari necesse erat. Labia vulneris sutura nodosa et emplastro adhæsivo solito modo connexuimus, quo facto vulnus omnino cute obtectum est. Idque vulnus adeo erat longum, ut vel septem opus essent suturae. Ceterum ligamen solitum adhibitum, quod die undecimo Martis permutatum. Sanatio haud lente procedebat. Deinde, postquam paucis quibusdam locis sanatio facta erat per primam intentionem, aliis contra per secundam, ligaturae eae, quibus labia vulneris continebantur, sensim aliae post alias sublatae sunt. Eae quoque ligaturae duae, quae circum parvas arterias adhibitae erant, brevi decide_runt; non item ea, quam venae saphenae admoveramus. Quae ligatura quum majore ex parte cute tegeretur, non poterat res quidem satis accurate explorari; sed quia ligaturam firmissime adhaerere apparebat, concludere licuit, locum eum, cui erat

applicata ligatura, granulatione uberiore obturatum esse. Aliqui parvuli abscessus in vicinia vulneris apparebant, sed brevi evanuerunt, ligamine comprimente his locis indito. Vir noster domum revisere vehementer cupiebat, quod ut sibi liceret quum identidem postulasset, non jam potuimus desiderio hominis resistere. Tum autem, quum ille (29 die Martis) Nosocomium reliquit, pars aliqua minuscula vulneris nondum erat sanata et ligatura venae saphenae etiamtum inerat *).

Prius tamen, quam suscipimus narrare ea, quae ad explorationem naturae tumoris pertinent, quae praecipua futura est pars hujus disputationis, pauca nobis sunt addenda de ipsa methodo operandi a nobis adhibita. Nimirum de subligatione venae saphenae dicturi sumus. — Solet illud quidem tamquam ex generali quadam lege in universum praescribi, ut in operando, quantum fieri possit, venarum subligatio evitetur et, ut quotiescumque compressione uti liceat, eaque sit ad rem satis, hæc semper adhibeatur. Sic nos quidem sentimus, vena subligata circulationem collateralem non posse aeque facilem esse, atque tum, quum illa subligatio in arteria facta sit **), propterea quod fluxus sanguinis, qui maxime omnium efficax est, in systemate venoso non eandem habet vim, atque in systemate arterioso. Quod si, ut tunc nobis accidit, locus subligationis situs est prope ad finem venae, id est, ibi, ubi

*) Medio mensi Apr. ejusdem anni nobis nuntius allatus est, vulnus esse sanatum, excepto eo loco, quo inhaerens etiamtum ligatura inerat.

**) Contrariam alii sequuntur sententiam, qua de re vide exempli causa Handb. d. Chir. v. Rust. B. X. S. 379.

in aliam majorem init, fieri necesse est, ut non exigua stasis sanguinis, ad tempus certe, existat in omni vena subligata ejusque ramis. Ex quo ipso gravia multa consequi possunt. Neque tamen haec omnia sunt. Constat, quam sit periculosa phlebitis suppuratoria; ceterum ex iis, quae cel. Travers in venis subligandis expertus est, consequens esse videtur, ut haec vasa non eodem modo nec aeque facile, atque arteriae, quum omnino persecta sint, coalescant. Nec igitur unquam, nisi oblata necessitate, vena major — in minore nihil opus, — subliganda. Est quidem verum, non antiquo solum, sed etiam recentiore tempore, eoque fortasse maxime, varias tentatas esse operationes, in iisque venarum satis magnarum subligationem, ad varices tollendas; sed, ni fallimur, ii, qui tentarunt, saepissime vel auso exciderunt vel tristissimum deplorarunt rei institutae eventum. Haec fortasse satis erunt ad demonstrandum, quam caute sint venae majores tractandae. Nobis autem in eo casu, de quo explicavimus, nullum erat eligendi arbitrium. Quicumque non omnino rei expers hæmorrhagiam attendisset, nequaquam dubitasset, quin nulla alia ratione sanguis sisti posset, nisi usu ligaturae celeriter arrepto. Hîc autem prospere sine dubio accidit, ut una modo ligatura, infra locum sectionis, opus esset, quia id, quod interdum usu venit, hîc non evenit, ut inverso sanguinis cursu etiam pars cordi propinquior vasis persecti sanguinem mitteret. Subligatio nullum traxit effectum minus prosperum, nisi forte ligaturam remanentem in malis duxeris. Celius commemorat, se, quum, sanguine ex venis majoribus profluente, ligatura usus esset (hoc autem in amputatione maxime saepius se fecisse) numquam vidisse phle-

bitim inde ortam. — Nostrum esse duximus tristiorem significare exitum, qui rem illam consequi possit; sed tamen eam rectissime adhiberi posse tum, quum methodum hæmostaticam certissimam vel unicam certam contineat, id profecto constare videtur.

Descripturi jam anatomicas tumoris rationes primum omnium commemoremus, integumenta tumoris integra fuisse, ob eamque rem nullam ibi aperturam. Quamquam integumenta illa uno loco erant paullo tenuiora, quam reliqua aliquanto majore parte ambitûs sui, eoque ipso loco, quo in externa exploratione digitum paullo altius inferre licebat. Nihilo tamen minus ea fuit eorum firmitas, ut, quum peracta exstirpatione tumor manibus exciperetur et elapsus in pavimentum decidisset, ruptus non sit. Incisione facta apparuit, contentum tumoris fluidum esse et quidem humorem rubro-fuscum, qui, ut ex specie judicabamus, sanguis erat et, ut exactius loquamur, proxime accedebat ad similitudinem ejussanguinis, qui in menstruis exit. De humore mox accuratius explicabimus. Cavitas tecta erat membrana tenui ac laevi, quae serosis plane similis videbatur. Haec membrana extrinsecus cohaerebat cum alia eaque texturae cellulosae, quae quidem parte sua externa in panniculum adiposum transiit. Hic denique passim admodum erat crassus, eo modo loco excepto, de quo nuper locuti sumus. Res autem ad anatomiam pertinens et notatu dignissima ea fuit, quod tota cavitas in multitudinem loculamentorum imperfecte divisa videbatur. Imperfecte propterea dicimus, quod nullo loco dissepimenta ab uno cavitatis latere exeuntia

alterum contingebant, sed diversos quasi processus constituebant, quibus loculamentorum inter se commercium non impediretur. Qua de causà cavitas admodum mira erat specie, poteratque, humore emisso, aliquam dici habere cum ventriculis cordis similitudinem, tametsi praeparatum jam est ex aliqua parte mutatum. Dissepimenta simul ex serosa membrana, simul ex cellulosa constabant. Hinc illa quidem multo majorem habebat superficiem, quam habuisset, si non praecipuam partem multorum illorum ubique prominentium dissepimentorum constituisset, sed, ut in solitis tumoribus cysticis fieri sæpissime solet *), cavitatem modo operuisset. Quam rem hoc loco commemoramus, de ea postmodum commonituri. Passim inveniebantur hydatides, parietibus cavitatis adhaerentes, erantque fere nucum Coryli Avellanae magnitudine, ut tamen aliae majores, aliae minores essent.

Verumtamen, ut de tumore certius quid existimare possemus, in pervestigatione anatomica non acquiescendum putavimus. Etenim credebamus, ut, quod quaerebatur, assequeremur, liquorem tumoris chemice examinandum, ob eamque rem cel. Professoris Wallquist operam petivimus, qui optatis nostris comiter respondit. Isque de exploratione a se instituta haec:

---

*) Nescii non sumus, esse tumores cysticos, quorum superficies interior, non laevis nec membranae serosae similis, adeo non aequa sit, ut potius velut rugosa vel reticulata videatur, qualis quum sit, membranae mucosae referat similitudinem. Verumtamen hoc monemus, quamquam interior tumoris membrana in eo casu, quem descripsimus, non posset non plurimas habere rugas sive plicas, tamen fieri non potuisse, quin illius cum membranis serosis similitudo adpareret.

"De sanguine, qui in tumore cystico repertus est."

"Hic sanguis circiter septem decilitras gallicas aequabat. Cujus gravitas specifica ad + 15° erat tantummodo 1,040."

"Qui humor, num re vera sanguis esset necne, quum quaereretur, microscopio adhibito examinatus est, apparuitque, in illo inesse solita sanguinis corpuscula, quae nec colore nec forma dissimilia essent iis, quae in sanguine normali insunt; quamquam illorum erat numerus solito minor. Quod idem hoc experimento comparativo est confirmatum: hujus, de quo loquimur, sanguinis sanguinisque recentis venosi a fibrino liberati, partes æquales utraeque separatim mixtae sunt cum æque magnis quantitatibus solutionis sulphatis natrici concentratæ, deinde vero colatæ, et ratione prorsus simili eâdemque tractatae. Tum vero sanguis ille, de quo quaeritur, minus hæmatini globulinique quam normalis se continere ostendit, quamquam quantitas hæmatini et globulini in utroque sanguine hoc modo accurate determinari non potuit. Sanguis ille, de quo quaerimus, nec quiete nec quassatione coagulatus est, ex quo colligi licebat, fibrini in eo non esse satis. Hoc ipsum simulque paucitas illa corpusculorum sanguinis et gravitas specifica exigua ostendunt, illum sanguinem ejusmodi esse, ac sanguinem, cui Spanaemiae nomen attribuit Simon (Medic. Chemie, II. 203)."

"Coronidis loco monendum est, in illo sanguine experimenta solitis reactivis, chloro, acido nitrico et infuso gallarum turcicarum facta esse; itemque in eo, cum coqueretur, nihil aliud repertum, quam quod in quovis sanguine."

Quum igitur tumor ille sanguinem contineret, etiamsi quodam modo mutatum, quumque sanguis in diversis tumorum generibus inesse possit, necesse est nostrâ interesse explanare, cujus generis sit tumor ille, de quo nunc quaerimus. Quibuscum autem tumoribus aliqua comparatio institui potest, ii fortasse non possunt esse, nisi quattuor hi: 1) Aneurysma, cujus sunt species complures, A. verum, spurium, mixtum, varicosum, racemosum s. anastomoticum; 2) Telangiectasia; 3) Varix; 4) Haematoncus s. Abscessus sanguineus. Jam vero monemus, nostrum tumorem non potuisse ad quodquam unum horum generum referri, quum indicia, quae hoc suaderent, essent nulla. At dum in hujus rei contemplatione versamur, invenimus, Velpeau mentionem facere tumorum alîus cujusdam generis, quos *Tumeurs hématiques* *) appellet, de quibus sese ipse paene dicat primum omnium exposuisse. Is horum tumorum duo ponit genera, ut sint vel ii, qui, etiamsi ex effusione sanguinis orti, tamen, si examinaveris, ex partibus solidis constent, *Tumeurs hématiques solides*, vel ii, quorum adhuc fluidum sit contentum, *Kystes hématiques*. Illos omittentes, Velpeau'anam illam adferamus horum descriptionem generalem. "Quum effusiones, inquit, ejus sanguinis, qui resorptus non est, non efficiunt tumores solidiores (*tumeurs hématiques concrètes*), illae novum sibi induunt habitum et causam praebent tumorum cysticorum, qui continent modo massam fibrinosam commixtam cum

*) Nouveaux Éléments de Médec. opératoire, T. II. p. 55. Bruxelles 1840.

sero, quod magis minus ad flavum, rubrum, fuscum colorem accedat, — modo partes solidiores, quas corpora cartilaginea appellant, parvulas hydatides aut formationes lymphaticas, quaeque in humore speciem olei vel lactis referente aut pellucido, cujus est major vel minor copia, natant; ita ut cuncta habeant quandam similitudinem cum jure ex crimnis hordei vulgaris vel oryzæ sativæ cocto, vel cum laminis, cum corpusculis cartilagineis plasticisve(?), cum dissepimentis, modo cohaerentibus cum interiore parte sacci, modo liberis. Ceterum haud raro accidit, ut omne contentum sacci in humorem omni parte sibi consimilem, modo rubicundum, et syruposum, modo lacteum vel etiam roseum, et oleaceum, modo plane serosum atque citrinum commutetur *)."

Fieri vix potest, quin nonnullis in partibus inter *Kystes hématiques*, de quibus Velpeau, et tumorem illum, de quo nos nunc, certam esse cernas similitudinem. Ceterum est illud quidem diligenter animadvertendum, quod docet ille in genu maxime hujusmodi tumores sanguineos reperiri. *Kystes* enim *hématiques* divisos vult in a) *Kystes hématiques celluleux* et b) *Kystes hématiques muqueux et synoviaux.* Sunt autem illae, id quod ex ipso nomine adparet, in tela cellulosa sitae; hae in bursis mucosis, et in has quidem valet id, quod contendere illum diximus. Hoc loco autem te, B. L., commonitum volumus, aegrum illum, de quo nunc, multis ante annis, quam tumor, quem exstirpavimus, exsisteret, consimili alio tumore, in genu sito, laborasse.

*) L. c. p. 61.

Jam igitur idonei scriptoris auctoritate id confirmavimus, esse tumores sanguineos consimiles ei, de quo locuti sumus. Una tamen parte noster casus discrepat ab iis, de quibus scripsit Velpeau; id autem, quo discrepat, res est maximi ponderis, ipsa nimirum morbi causa, quamquam fortasse dissimilitudo minus est sita in vera differentia, quam in opinionibus diversis, quae hinc aut illinc falsae esse possunt. Velpeau quidem docet, tumores exsistere effusione sanguinis, *épanchement de sang.* Non ille quidem continuo explicat, quae sint hujusmodi effusionum causae quove fiant modo, sed ex aliquot casibus, quos deinceps obiter tangit, facillime intelligas, ab externa aliqua magis minusve violenta causa, ut plaga, ut lapsu, profectum esse morbum, qui aliud esse non possit, nisi haematoncus sive abscessus sanguineus. Quum autem haematoncus subito oriatur aut certe longe celerius, quam tumores in nostro ægro, in quo per quattuor annos perpetuo augebantur, hi alio quo modo orti sint, necesse est. Nostra quidem de ejusmodi tumoribus sanguineis (quorum in numerum non volumus relata aneurysmata, telangiectasias aut varices) est opinio, eos saepissime certe ex sanguine extravasato oriri et quidem subito, at eorum interdum aliam quoque reperiri causam. Nam si exempli gratia ad hunc morbi casum animum attendamus, cavitatem tumoris nullum habuisse cum ullo vase sanguifero commercium reperiemus. Nec facile ex iis, quae æger ipse de re commemorabat, adduci potuimus, ut crederemus, eorum cujusquam vim aliquam extrinsecus illatam fuisse causam. Itaque non possumus intelligere, unde facta sit sanguinis collectio, nisi si sumamus, continuam quandam fuisse secretionem.

Quaerat autem fortasse quispiam: num sanguis ex sanguine secerni potest? an non fit ex naturae lege, ut ex sanguine, fonte illo communi, ii tantum secernantur humores, qui illi absimiles sint? Quum autem non possimus cujusquam auctoritatem sive experimentis sive cogitatione nixam citare, nobis est ad analogiam confugiendum. Physiologiam simul et Pathologiam consulamus. Principio igitur de mensibus mulierum cogitemus. Haec, ajunt, sanguinis effusio ab secretione ex vasis capillaribus uteri vel interdum ex vasis vaginae simul oritur *). Sunt tamen non pauci, qui negent, effusionem sanguinis posse per secretionem fieri. Systema enim vasorum sanguiferorum, in quo sunt arteriae, vasa capillaria et venae, ut est notissimum, continuum quiddam est. Non jam placet Anatomicis, esse aperta vasorum ostia, esse vasa exhalantia. Nec sunt, microscopio adhibito, reperti tanti pori in tunicis vasorum, ut corpuscula sanguinis per eos exire possint. Itaque ut in hæmorrhagiis multis, quas olim dixerunt, dynamicis, ita in mensibus mulierum, quum effusionis causam non reperirent aliam, rupturam vasorum capillarium fieri sumserunt. Nos quidem nec possumus nec volumus hoc loco rem diligentiore perquirere cognitione; quae res ut innotescat quamquam ab universa disciplinae ratione non potest non interesse nostrâ, tamen non opus est ad eam, de qua nunc loquimur, collectionem sanguinis declarandam. Nam si in femina, normali valetudinis statu, quantitas sanguinis effundi potest, profecto non est absonum fidei, quantitatem aliquam ejus

---

*) Busch, Lehrb. d. Geburtskunde, 4:te Aufl. §. 49.

humoris, de universa massa secretam, in mare quoque, salva de cetero valetudine, interdum effundi posse. Hoc quomodo fiat, secretione an vasorum capillarium ruptura, id nos quidem non magis possumus explicare, quam cur fiat: monemus autem, menses ipsos, rem illam normalem, nondum ita explicatos, ut sit omnibus satisfactum *). De effusione sanguinis in statu aegrotationis in universum de industria locuti non sumus.

Jam vero Pathologiam chirurgicam adeuntes videmus, esse morbum, qui magnam cum morbi casu praesenti habeat similitudinem. Neque enim quemquam Chirurgum expertiorem fugit, interdum exsistere Hydroceles species, in quibus humor non sit tantum serosus, qualis saepissime reperitur, sed sanguine mixtus, quo fit, ut fuscum habeat colorem et illa pelluciditas, quae aliâs ipsa morbi nota est, desideretur. Quod si semper usu

---

*) Est profecto, quod miremur, in mare quoque effusionem quandam sanguinis certo tempore recurrentem et menstruis quodam modo respondentem, reperiri. Arnold (Lehrbuch der Physiologie des Menschen, 2:ter Th. 5:te Abth. Zürich 1842) pag. 1096 de hac monet re, quam dignam censemus, ad quam magis, quam hactenus solitum est, animum attendant docti homines. Ille autem de iis loquitur, quae Sanctorius expertus est: "mares bona valetudine, et simplici nec vario utentes victu, singulis mensibus unam vel duas libras corporis pondere ingravescere, simulque magis magisque torpescere et languere, donec, ingenti oborto sudore et urina jumentosa, malum desinat. Quaeque cetera dicit, argumento huic conjunctiora sunt, quam ut possint praeteriri. "In quodam morbi casu (quem commemorarat Fournier) in mare, qui jam ad tempus pubertatis plane pervenisset, effusionem sanguinis ex urethra certis intervallis recurrentem repererant. Nec raro in hemorrhoidibus fluentibus marium hujus rationis periodicae commonemur." — Nonne suspicari licet, exstirpatos illos in aegro nostro tumores ex periodica sanguinis secretione ortos?

veniret, ut pelluciditas illa subito desineret numquam reversura, liceret profecto opinari, rupturam quandam vasorum, — non capillarium, ut perspicuum est, sed majorum, — sanguinis cum cetero humore commixti causam esse (ac sine dubio hujusmodi opinio saepius a veritate non abhorret); sed incidunt morborum casus, ubi ista rei declarandae ratio minus sufficiat. Nimirum accidit interdum, ut pelluciditas illa ad tempus desinat, mox recurrat. In quo etsi sumere liceat, collectionem sanguinis exstitisse majoris vasis ruptura, tamen naturae videtur convenientius, secretione praecedente absorptionem factam. Quae nostra opinio non est ea quidem contraria illi Velpeau'anae, de quo scriptore supra; neque enim ille negat, fieri posse secretionem. Cujus verba scriptoris, de illa pelluciditatis mutatione, quae in Hydrocele interdum cernitur, dicentis, referre juvat: "*Cela tient à ce, qu'une certaine quantité de sang s'exhale, s'épanche d'une manière quelconque au milieu d'une hydrocèle plus ou moins ancienne. De translucide, le liquide de la tunique vaginale devient alors opaque. Si plus tard la matière colorante du sang disparaît, la transparence se rétablit. Dans le cas contraire l'hydrocèle reste définitivement transformée en hématocèle* *)". Porro alio quodam loco ejusdem libri, ubi in hujus morbi sive hæmatocceles descriptione versatur, hydrocelen in haematocelen mutari posse, itemque hanc in illam **). Hoc si non negaveris, negare vix poteris, in utroque morbo, interdum certe, esse

*) L. c. p. 588. **) L. c. p. 405.

quandam oriundi similitudinem. Nemo nescius est, hydrocelen oriri ab vera exhalatione, sive ut accuratius dicamus, ex prava quadam ratione, absorptionis exhalationisque inter se mutua. Jam vero quum absurdum sit negare, haematocelen saepissime ab sanguinis extravasatione proficisci, tamen fortasse ortus morbi ex secretione quoque nonnumquam non ita male declarari potest. munitam habemus analogiae quasi viam, quam si qui ingrediantur, fortasse poterunt reperire, quo modo collectio sanguinis in eo, de quo dicimus, morbi casu facta sit *). Si cui autem phrasis illa "ruptura vasorum capillarium", quam "secretio" magis placet, per nos quidem licet illa uti, quippe quorum nihilominus fortasse significata sit opinio, quam non simpliciter extulerimus, sed aliorum censurae subjecerimus, hactenus nulla oblata occasione examinandi naturam ejus processus, in quo sanguis reperitur nulla praecedente ruptura vel omnino laesione vasorum. — Jam igitur conati sumus ostendere, esse quoddam genus tumorum sanguiferorum, quod minus notum sit, et explicare, unde oriri solcant. Si cui autem eorum, qui eadem studia amplectuntur, ubi quando consimilem morbi casum deprehenderit, rem melius explicare continget, hoc nobis erit jucundissimum, qui haec scribentes nihil spectemus, nisi quod ipsi Disciplinae conducat; quamobrem optamus, quantum possimus, Chirurgorum sollertium animos ad eos advertere casus, qui cum eo, de quo nos, similitudinem quandam forsitan habeant.

---

*) Magna intimae membranae extensio (vide pag. 194) ad rem declarandam nonnihil adfert.

Swalin, Doctor Medicinae clarissimus, in tertio Volumine Hygieae (Medicinsk och Pharmaceutisk Månadsskrift), pag. 515 seqq. ex Gazette Médicale de scripto Fleury, Medici Clermontini, exscripsit: "Om enkysterade tumörer, som förekomma på framsidan af knäet". Ibi fit mentio tumoris, qui fuscum liquorem contineret et chocolatae non dissimilem, aqua coctae; itemque alterius tumoris, cujus esset liquor serosus cumque sanguine mixtus, et in quo cysta in superficie interiore pertexta esset tribus chordis fibrosis iisque valde firmis, in medio liberis, sed extremis partibus adhaerentibus ad parietes cystae, habentibusque quandam similitudinem trabecularum cordis carnearum; denique aliorum, qui reperirentur solidi, maxima certe ex parte, viderenturque ex fibrina nati, et in quibus mediis liquor quidam sanguinolentus contineretur. Ad haec si adjunxeris, quod aeger ille, de quo nos, longe ante, quam eum curandum acciperemus, in vicinia genu tumorem alium habuisset, facile videberis posse suspicari, complures ex iis tumoribus, quos Fleury vidit, hujusmodi ferme fuisse, atque ii, qui in aegro nostro reperiebantur; et liceat nobis eos, qui sint talium rerum cognitionis studiosiores, ad illud scriptum vocare, in quo complura adnotata sunt, quae similitudinem etiam augeant. Ceterum ibi comperire licet, quamquam Fleury non copiosius de causis morbi disserat, cum tamen de hac re nequaquam idem, atque nosmet, sentire. A crebra enim pressione tumores istos ductos vult, "quoniam morbum in iis maxime hominibus reperies, quibus necesse est genubus incubare, ut sacerdotibus,

monachis, lotricibus, caminariis". Si de iis tantummodo quaeratur tumoribus, qui liquorem serosum continent, nihil contra dicemus; sin de iis, qui continent sanguinem, aut etiamnum fluidum, aut qui nihil aliud nisi residuum solidum (fibrinam) deposuerit, explicationem illam Fleuryanam nequaquam in quovis casu probabilem judicamus.

# NUMMORUM ANGLOSAXONICORUM
## CENTURIA SELECTA,

E

MUSEO ACADEMICO UPSALIENSI

DEPROMPTA, DIGESTA ET ILLUSTRATA

A

**JOH. HENR. SCHRÖDER.**

---

Orbi erudito diu fuit in votis, ut publicam in lucem prodirent Nummorum Anglosaxonicorum coacervati thesauri, qui per longam annorum seriem e gremio telluris Succanæ, præsertim Gothlandia ex insula, eorumdem feracissima, in lucem prolati, vi Legis in Museum Regium Stockholmiense immigrarunt. Nostra hæc ætas voti tandem damnata hosce thesauros egregie digestos et ordinatos lætabunda et plaudens vidit et admirata est. Catalogum insuper adcuratissimum totius thesauri, qui specimina nummorum plus IV. Millium complectitur, sub auspiciis Regiæ Academiæ Litterar. Humanior. Histor. et Antiquitat. Stockholmiensis, adornavit et sumptibus publicis edidit Celeb. Hildebrand, Dire-

ctor Regii Nummophylacii meritissimus, eumque Catalogum Commentario eleganti et satis copioso idem illustravit *).

Cum vero in hocce Musei Regii Stockholmiensis longe præstantissimo nummorum thesauro, cui nec domi nec foris quidquam simile aut secundum invenire possis, plane desint complures nummi, iique præstantissimi, qui in Museo Academico Upsaliensi, nostræ demandato custodiæ, adsunt, Numismaticis nostri temporis haud ingratum fore duximus, si horum quoque enarratio quædam et descriptio in medium prolata et supplementi instar publici juris facta esset. — E collectione igitur nummorum Anglosaxonicorum DCCL. et quod excurrit eos selegimus, qui per se rariores et quodam modo singulares, sive Officinas ipsas, unde profecti sunt, sive Monetarios, quorum nomina præferunt et profitentur, respexeris, eo majore cura studioque digni sunt, quod non solum in Museo Regio Stockholmiensi, omnium ditissimo, desiderantur, sed et in Museis ipsius Angliæ, quatenus hæc e scriptis Cel. R. Ruding, E. Hawkins, J. Lindsay cet. **) cognoscere potuimus,

---

*) *Anglosaxiska Mynt i Svenska Kongl. Myntkabinettet, funna i Sveriges jord.* Monnaies Anglosaxonnes du Cabinet Royal de Stockholm toutes trouvées en Suéde. Stockh. 1846 in Quarto, cum Tabb.

**) Annals of the Coinage of Britain, by *R. Ruding*. Lond. 1817—19 in Quarto cum Tabb. — Vestigia illius secuti hanc materiam uberius et exactius adauxerunt et illustrarunt *E. Hawkins*, *J. Lindsay*, cet. Cfr. de cetero Archæologia Britannica et the Numismatic Cronicle by *J. Akerman*, passim.

maximam ad partem frustra quæruntur. Sic habebis L. B. Centuriam Nummorum Anglosaxonicorum lectissimam, additis eorum aliquot nummorum, quorum exempla jam antea a Celeb. Hildebrand proposita quidem inveniuntur, qui vero respectu Epigraphico quasdam differentias non prorsus contemnendas exhibent.

Incipiet vero series nostra ab Eadgaro Rege, Eadmundi Regis an. 959 demortui filio, qui totam Angliam suo tandem subjecit imperio an. 973. Subsistet vero in Haraldo II., Godvini filio, qui Rex Anglis ostensus magis quam datus, anno 1066 ex quo regnare coepit, in proelio ad Hastings pugnato, sibi suisque funesto, a Wilhelmo Conquestore et regno et vita spoliatus est. Nummus penes nos unicus, isque rarissimus, in Museo Upsaliensi imperii hujus brevissimi tamquam *κειμηλιον* quoddam coruscat.

In dispositione nummorum et descriptione brevitati studuimus. Typorum vero formas et majores discrepantias in margine apposuimus, iisdem signatas litteris, quibus Cel. Hildebrand, in Tabulis operi laudato adnexis, usus est.

## EADGAR

**REX ANGLORUM A. 959—975.**

### EAXECEASTER[a].

*(Exeter.)*

1. ✝ ÆLFSTAN M-O EXAN — *Typ. C.* 2.

### GRANTABRICGE[b].

(Cantabrigia, *Cambridge.*)

2. ✝ LIFINE M-O GRANT — *C.* 2.

### T(TAMWEORTHIGE?[c]).

*(Tamworth.)*

3. ✝ EOFERARD M° T — *B a.*[d]

---

## EADWEARD II. (Martyr)

**REX ANGLORUM A. 975—978.**

### WINTONIA.

*(Winchester.)*

1. ✝ BVRNELM M-O PINTA — *Typ. A.*

---

*a*) Desunt hujusce officinæ nummi, sub Eadgaro, in Mus. Reg. Stockh.

*b*) Unicus tantum nummus in Mus. R. Stockh. adest.

*c*) Officinam a littera T. incipientem dubii huic adsignavimus urbi, quæ etiam sub Eadvardo II. Martyre nummis coruscat.

*d*) Inter nummos Mus. R. Stockh. hic Typus deest.

# AETHELRAED II.

**REX ANGLORUM A. 978—1016.**

## CADANBYRIG [a]

*(Cadbury.)*

1. ✝ ƑVLFELM ON ᴆADAN — *Typ. A.*

## CAENTWARABYRIG.

*(Canterbury.)*

2. ✝ ƑVLFRIC M⌒O ᴆÆNT — *D.*

## COLENCEASTER.

*(Colchester.)*

3. ✝ BYRHTNOÐ MO ᴆO — *E.*
4. ✝ GODƑINE MO ᴆOLEᴆ — *C.*

## DOFERAN.

*(Dover.)*

5. ✝ MANNINᴆ ON DOFER — *A.*

## DYFELIN.

*(Dublin.)*

6. ✝ FÆREMIN MO DYFL — *D.*

## EAXECEASTER.

*(Exeter.)*

7. ✝ ᴆARLA ON EAXEᴆEꞩEA — *A.*

---

*a*) Nummi hujus officinæ rarissimi. Duo tantum in Mus. R. Stockh. adsunt.

## EOFERWIC.

(Eboracum, *York.*)

| | | |
|---|---|---|
| 8. | ✢ ASOLF M-O EOFRI | *Typ. A.* |
| 9. | ✢ DIRVLF MO EOFRI | *D.* |

## GIPESWIC.

*(Ipswich.)*

| | | |
|---|---|---|
| 10. | ✢ ÆÐEILBRIHT MO GIPE | *E.* |
| 11. | ✢ GIODDIG MO GIPES | — |

## GLEAWECEASTER.

*(Gloucester.)*

| | | |
|---|---|---|
| 12. | ✢ SIRED ON GLEAWE | *A.* |

## GRANTABRICGE.

(Cantabrigia, *Cambridge.*)

| | | |
|---|---|---|
| 13. | ✢ ÆLFFI ON GRANTE | *A.* |
| 14. | ✢ ENIT MO GRANTE | *E.* |

## HEORTFORD.

*(Hertford.)*

| | | |
|---|---|---|
| 15. | ✢ ÆÐELFERÐ M-O HEORT | *C.* |

## LEIGCEASTER.

*(Leicester.)*

| | | |
|---|---|---|
| 16. | ✢ ELEFINE MO LEG | *D.* |

## LIGER s. LEHER-CEASTER.

*(Chester.)*

| | | |
|---|---|---|
| 17. | ✢ BVRVLF MO LEHR | *E.* |

## LINCOLNE.

*(Lincoln.)*

| | | |
|---|---|---|
| 18. | ✝ ÆIFEL MO LINCOL | *Typ. C.* |
| 19. | ✝ ÆUSTAN MO LINCO [b] | *A.* |

## LUNDENE.

*(London.)*

| | | |
|---|---|---|
| 20. | ✝ EADLAF M-O LVNDONI | *B.* 2. |
| 21. | ✝ IDEORÆIÆE M-O LVN | *C.* |
| 22. | ✝ OÆLUF [c] M O LVNDONI | *B.* 2. |

## NORTHWIC.

*(Norwich.)*

| | | |
|---|---|---|
| 23. | ✝ EADÞINÆ MO NORÐ | *A.* |
| 24. | ✝ EDÞINE M·O NO | *D.* |
| 25. | ✝ — — — NORÐÞ | *A.* |

## OXNAFORD.

*(Oxonia, Oxford.)*

| | | |
|---|---|---|
| 26. | ✝ ALFÞOLD ON OXNA | *A.* |

## STÆTHFORD [d].

*(Stafford.)*

| | | |
|---|---|---|
| 27. | ✝ ALFÞOLD MO ÆTÆÐ | *E.* |

---

*b*) Ex nostro nummo commode explicatur Fragmentum in Mus. R. Stockh., de quo vide *Hildebrand*, l. c. p. 48.

*c*) Sic. Lege: OSVLF.

*d*) Duo hujus officinæ nummi in Mus. R. Stockh. adsunt.

## STANFORD.

*(Stamford.)*

28. ✢ ZFARTEAR MꝊO ꞦTAN — *Typ. E.*

## THEODFORD.

*(Thetford.)*

29. ✢ ÆLFFINE ON ÐEODF — *A. c.*

## WIGERCEASTER.

*(Worcester.)*

30. ✢ BRVNꞦTAN ON FIGEC — *A.*

## WILTUNE.

*(Wilton.)*

31. . . . . MO FILTVN *e)* — *C.*

## WINCEASTER.

(Wintonia, *Winchester.)*

32. ✢ OꞦMVND M·O FINC — *D.*

## Loco incerto.

33. ✢ ꞦVAN . . . . . *f)* — *B.* 3.

---

*e)* Truncatus nomen monetarii perdidit.

*f)* Deest hujus monetarii nomen, sub Æthelredo Rege, apud *Ruding* et *Hildebrand.* Nostro in nummo male abscisso nomen officinæ evanuit.

# CNUT (Canutus Magnus)

## REX ANGLORUM A. 1016—1035.

### BATHAN.

*(Bath.)*

1. ✝ ALFOLD (sic) ON BAÐAN — *Typ. G.*

### COLENCEASTER.

*(Colchester.)*

2. ✝ SVNOLF MO COL — *E.*
3. ✝ FVLFFINE ON COLAC — *H.*

### CRVCERN [a].

*(Crewkerne.)*

4. ✝ FINAN ON CRVC — *E.*

### DORCEASTER [b].

*(Dorchester.)*

5. ✝ OSGAR MO DORE — *E.*

### EAXECEASTER.

*(Exeter.)*

6. ✝ ÆLFINE ON EC — *H.*
7. ✝ EDSIGEFARE [c] ON EC — —

---

*a*) Ex nummis hujus officinæ rarissimis unus tantum cum fragmento ejusdem cummatis in Mus. R. Stockh. adest.

*b*) Duo hujus urbis nummi, una cum variante, in Mus. R. Stockh.

*c*) Sic. Lege: Edsige Ware. Unicus cum expresso Monetarii cognomine, quem Museum Academicum possidet. Adest etiam in Mus. R. Stockh., de quo vide *Hildebrand*, l. c. p. 212.

| | | |
|---|---|---|
| 8. | ✝ ISEGOD ON EAX | *Typ. E.* |
| 9. | ✝ ÐVRGOD ON EAX | — |

## EOFERWIC.

(Eboracum, *York.*)

| | | |
|---|---|---|
| 10. | ✝ ARDIL ON EOFERPI | *H.* |
| 11. | ✝ DRINAN M-O EOFER | *G.* |
| 12. | ✝ GRVDAN ON EOFER | *H.*[d] |
| 13. | ✝ OÐIN ON EOFER | — |

## GIFELCEASTER.

*(Ilchester.)*

| | | |
|---|---|---|
| 14. | ✝ ÆLFFINE ON GIFELC | *E.* |
| 15. | ✝ OSFIG ON GIFEL | — |

## GLEAWECEASTER.

*(Gloucester.)*

| | | |
|---|---|---|
| 16. | ✝ ÆLFSIGE ON GLE | *E.* |
| 17. | ✝ FVLFEN M GLE | — |

## GRANTABRICGE.

(Cantabrigia, *Cambridge.)*

| | | |
|---|---|---|
| 18. | ✝ ÆLFRIC ON GRANT | *H.* |

## HAMTUNE.

*(Southampton.)*

| | | |
|---|---|---|
| 19. | ✝ LIOFFINE ON HAMT | *E.* |
| 20. | ✝ SIBODA ON HAMT | — |

---

*d*) Alius scil. typi G. in Mus. R. Stockh.

## HVNTANDVNE.

*(Hungtingdon.)*

| | | |
|---|---|---|
| 21. | ✢ ƑVLFRIC ON HUNTI | *Typ. E.* |

## LEIGECEASTER.

*(Leicester.)*

| | | |
|---|---|---|
| 22. | ✢ BRUNMANE O· LE | *E.* |
| 23. | ✢ ꟾVNLEF ON LEꟾ [c] | — |
| 24. | ✢ ƑVILSINE ON LEIOI (sic.) | *G.* |

## LINCOLNE.

*(Lincoln.)*

| | | |
|---|---|---|
| 25. | ✢ LEFƑINE ⊙ LNILON [f] | *H.* |
| 26. | ✢ LIFINC ON LINCOLN | — |
| 27. | ✢ SVNEꟾOD MO LIN | *E.* |

## LVNDENE.

*(London.)*

| | | |
|---|---|---|
| 28. | ✢ ÆLƑERD ON LVN | *H.* |
| 29. | ✢ ALFƑARD ON LV | *H.* |
| 30. | ✢ EꟾELƑERD ON LVN | *G.* |
| 31. | ✢ FREDI ON LVNDENE | *E.* |
| 32. | ✢ ꟾODMAN LVNDE [g] | — |
| 33. | ✢ LIOFƑOLD ON LVND | — |
| 34. | ✢ OSVLF ON LVNDEN | — |
| 35. | ✢ —— — LVNDENEE | — |
| 36. | ✢ ƑVLFNOOƉ LVN [g] | — |
| 37. | ✢ ƑVLFRED ON LVND | — |

---

*e*) In Mus. R. Stockh. adsunt alii, qui nomen monetarii GVNLEOF præferunt.

*f*) Sic. Litterarum ordo turbata ita restituenda: ON LINCOLN.

*g*) Particula ON omittitur.

## LYDANFORD [h].

*(Lydford.)*

38. ✝ ÆLFΓINE ON LYDAF — *Typ. E.*

39. ✝ SÆΓINE O LHYD [i] — —

## OXNAFORD.

(Oxonia, *Oxford.)*

40. ✝ ΓOLEMAN ON OXSE — *E.*

41. ✝ SÆΓINE O OXSEN — —

## RINI 1. RINNE? [k]

42. ✝ SIRIC ON RINNE — *E.*

## ROFECEASTER [l].

*(Rochester)*

43. ✝ ÆΓELΓINE ON RO — *E.*

44. ✝ LEOFΓINE MO ROC — *B.* [m]

## SCROBESBYRIG.

*(Schrewsbury.)*

45. ✝ ΓRINAN ON SCROB — *E.*

## SEREBYRIG.

(Old Sarum, *Salisbury.)*

46. ✝ ΓINEMAN ON SERE — *F.*

---

*h*) Unicum hujus officinæ nummum habet Mus. R. Stockh

*i*) Sic. Lege vero: ON LYD.

*k*) Multa sunt quæ obstant, quominus cum Cel. *Hildebrand*, nummos ita signatos ad RICYEBYRIG (*Rising Castle*) referamus.

*l*) In Mus. R. Stockh. etiam duo hujus officinæ nummi adsunt.

*m*) Nummi hujusce Typi apud nos rarissimi.

## STANFORD.

*(Stamford.)*

47. ✢ ALFAN ON ꞩTANFO — *Typ. G.*

48. ✢ ꞒARGRIM ONI ꞩTAN — *H.*

49. ✢ EADFINE MO ꞩTA — *E.*

50. ✢ ꞩFERTEROLD O ꞩTA — —

## SVTHBYRIG.

*(Sudbury.)*

51. ✢ FINꞩTAN ON ꞩVÐBY — *E.* [n]

## SVTHGEWERE.

*(Southwark.)*

52. ✢ ÆLꞩIG · M · ꞩVÐGE — *E.*

## TORCESIGE [o].

*(Torcksey.)*

53. ✢ ÐVRꞒETEL O TOR — *E.*

## VSTINV? [p]

54. ✢ OꞩGOT MO VꞩTINV (sic) — *G.*

## WINCEASTER.

(Wintonia, *Winchester.)*

55. ✢ BRVNINꞒ ON FIN — *H.*

---

*n*) Nullum hujus typi observavimus specimen in Mus. R. Stockh., quod tres tantummodo hujus officinæ nummos possidet.

*o*) Officinæ hujus nummi rarissimi, sub Canuto Rege, in Mus. R. Stockh. plane desunt.

*p*) Officina hactenus incognita. Nummos in VSTLA l. VSTLI sub Æthelredo Rege cusos, in Mus. R. Stockh. observavimus.

| | | |
|---|---|---|
| 56. | ✝ BVRFOLD ON FIN | *Typ. G.* |
| 57. | ✝ CINNA ON FINCST | *E.* |
| 58. | ✝ —— — FIN | — |
| 59. | ✝ FIDIA ON FINCESTR | *F.* |

## HAROLD I. (Harefot)

**REX ANGLORUM A. 1035—1039.**

### EOFERWIC.

(Eboracum, *York.)*

| | | |
|---|---|---|
| 1. | ✝ OÐIN ON EOFERFI | *A.* |

### LINCOLNE.

*(Lincoln.)*

| | | |
|---|---|---|
| 2. | ✝ ÆLFNOÐ ON LINCO | *A.* |
| 3. | ✝ ALDVLF ONN LINNCO | — |

### LVNDENE.

*(London.)*

| | | |
|---|---|---|
| 4. | ✝ ÆLFFERD ON LVND | *B.* |
| 5. | ✝ GODMAN ON LVN | — |
| 6. | ✝ FIDIGE ON LVNDE (litteris retrogradis) | *A.* |

### MEALMESBYRIG [a].

*(Malmsbury.)*

| | | |
|---|---|---|
| 7. | ✝ HVNR ON MELMES | *A.* |

### SCROBESBYRIG.

*(Schrewsbury.)*

| | | |
|---|---|---|
| 8. | ✝ FVLFGET ONN SCROB | *A.* |

---

*a)* Desunt hujus officinæ nummi sub Haraldo Rege, in Mus. R. Stockh.

THEODFORD.

*(Thetford.)*

9. ✝ BRVNSTAN O ÐEO *Typ. B.*

WINCEASTER.

(Wintonia, *Winchester.)*

10. ✝ LEFSTAN ON FINE *B.*

---

## HARTHACNVT

**REX ANGLORUM A. 1039—1042.**

HEREFORD.?

*(Hereford.)*

1. ✝ ARENGRIM M ...ERE [a]

LVNDENE [b].

*(London.)*

2. ✝ ODDENCR ON LVD

Officinæ incertæ.

3. ✝ SVMERLET ON [c]

---

*a*) Nummus noster, margine truncato litterisque initialibus abscissis, mancam officinæ notationem offert.

*b*) In definiendis Harthacnuti Regis nummis, hac in urbe cusis, discrepant auctores et haud raro in diversa abeunt. Ad Nummos nimirum Angliæ referunt Anglorum, ad nummos Daniæ Danorum Numismatici. Nummos II. secundum typos Danicis quamvis similes, dubii apposuimus, ut de iis judicent peritiores.

*c*) Notatio officinæ prorsus omissa est ob marginis angustiam. cfr. *Hildebrand*, p. 252.

# EDWARD (Confessor)

**REX ANGLORUM A. 1042—1066.**

## EOFERWIC.

(Eboracum, *York.*)

| | | |
|---|---|---|
| 1. | ✢ ALEIF ON EOFRƲIEƆ | *Typ. J.* |
| 2. | ✢ ARNGRIM ON EOFER | *F.**) |
| 3. | ✢ IOƆTEL ON EOFRƲI | *A. c.**) |
| 4. | ✢ STIRƆOLL ON EOFE | *A.**) |
| 5. | ✢ ÐORR ON EOFRƲIƆ | *E.**) |

## HAMTVNE.

*(Southampton.)*

| | | |
|---|---|---|
| 6. | ✢ ÆLEƲINE ON HATVN a) | *A.* |

## HEREFORD.

*(Hertford.)*

| | | |
|---|---|---|
| 7. | ✢ ƲVLƲINE ON HE | *A.* |

## LÆWES

*(Lewes.)*

| | | |
|---|---|---|
| 8. | ✢ BEORNOEFR ON LEƲ b) | *A.**) |

## LEIGECEASTER.

*(Leicester.)*

| | | |
|---|---|---|
| 9. | ✢ DIƐNNIG ON LEƐES (sic) | *G.* |

---

*) In area circellus pone crucem.

*a*) Nummus ampliori officinæ significatione conspicuus.

*b*) Nummus egregius, ita, ni fallor, explicandus: BEORN ON EOFR ON LÆWES. Scil. *Beorn* (*Monetarius*) *Eboracensis*, nummos cudi fecit *in Lœwes*. Exemplum quatenus novimus singulare, quod de cetero mirifice illustratur ejusdem *Beornonis* nummis

## LIGER s. LEHER-CEASTER.

*(Chester.)*

10. ✢ ÐVRGRIM ON LIRI — *Typ. A.*

## LINCOLNE.

*(Lincoln.)*

11. ✢ GODRIC ON LINCO — *F.*
12. ✢ ƿVLF ON LINCOLEI — *C.*

## LVNDENE

*(London.)*

13. ✢ ÆLFRED ON LVNDE — *C.*
14. ✢ DVDINC ON LVN — *A.*
15. ✢ ƿVLFƿI ON LV — *B.*

## WINCEASTER.

*(Winchester.)*

16. ✢ ÆLƿINE ON ƿINC — *B.*
17. ✢ EADMÆR ON ƿINCE — *C.a.*
18. ✢ IFINC ONN ƿINC — *D.*
19. ✢ LIFINC ON ƿIN — —

---

# HAROLD II.[c]

**REX ANGLORUM A. 1066. Jan.—Octob.**

## EOFERWIC.

(Eboracum, *York.)*

1. ✢ OVÐGRIM ON EOFR. In Area: PAX.

Typ. vide ap. *Ruding* Tab. 26. N:o 3.

---

Eboraci cusis, sub imperio *Haraldi* et *Edvardi*, quorum prior et in Mus. Acad. Upsal. et in Mus. R. Stockh. adest, posterior in Mus. R. Stockh. adservatur.

*c*) Nummi R. *Haroldi II.* longe rarissimi in Mus. R. Stockh. omnino desunt.

Coronidis loco addimus nummum, qui a Sancto Eadmundo nomen habet, quemque numismatici Angliæ vulgo tribuunt Abbatibus monasterii de S:to Eadmundo (St. Edmundsbury) qui jam tempore Canuti Magni et Edvardi Confessoris celebres fuere *).

1. ✢ RObbERTUS ME FECIT. Littera $\bar{A}$ in area.

P. adv. corrosa et malleo læsa, qua inscriptio marginalis ferme evanuit.

Nummus deauratus et ansula munitus, olim ornamenti loco habitus, Arosiæ in Westmannia haud ita pridem e terra effossus, in Museum Acad. Upsal. immigravit **).

---

*) Habemus scilicet statuta *Canuti* Regis in Concilio Wintoniensi ann. 1021, de monasterio S. Edmundi a jurisdictione Episcoporum eximenda, ap. *Mansi*, Concilior. Tom. XIX. pag. 590.

**) In thesauro nummorum ad *Cuerdale* Angliæ an. 1840 e terræ gremio prodeunte, nummi hujus generis plus MDCC. occurrunt, de quibus vide Cel. *Hawkins*, Numismatic Cronicle 1842. Apr.

# PHYCEARUM,

QUAE

IN MARIBUS SCANDINAVIAE CRESCUNT,

ENUMERATIO.

AUCTORE

**JOHN ERH. ARESCHOUG.**

SECTIO PRIOR FUCUCEAS CONTINENS.

Plantarum perfectiorum varietatem, sive specierum sive formarum copias spectamus, coeli solique indolem eniti jam satis constat. At Phyceae diverso stipantur medio, indeque earum proventus uberior aut rarior, luxurians aut tabescens, ex aliis rationibus videtur explicandus. Attamen his inest tanta cum plantis aëreis analogia, ut vegetatio Phycearum cum Lichenosa, svadente insuper naturali affinitate, aptissime comparetur. Ut Lichenes ex aëris et soli constitutione ex maxima parte pendent, sic Phyceae ex aquarum et fundi indole. E maris salsitudine primaria quidem derivatur diversitas, at vix minoris momenti censerem fundum scopulosum e. s. p. Nam litora mere arenosa, etiam maris salsissimi, tantum lustranti eadem specierum peculiarium obviam venit inopia, ac in aquis parum

salsis. Hinc, Phyceas Scandinaviae earumque distributionem geographicam expositurus, obiter haud ex re alienum duxi primaria momenta, vegetationem Phycearum determinantia, obiter indicare.

§. 1. Primaria, vegetationem marinam determinantia, momenta sunt:

1. Salsitudo maris. Ut Lichenibus aëris humiditas, ita Phyceis marinis salsitudo aquae inter omnia momenta, quae in vegetationem marinam vim excercent, primum tenet locum. Major aquae salsitudinis gradus se patefacit: a) majori specierum numero, b) formis, sive systema vegetationis respicimus sive fructificationis, melius evolutis; minor e contrario a) inopia specierum, et b) formis parum explicatis. Nulli alii caussae, quam salsitudini aquae minori, adscribi potest specierum inopia in orientali mari, in quo Halicoccus nodosus, Laminaria saccharina, Iridaea edulis, Rhodomenia palmata, Delesseria sanguinea multaeque aliae, jam in freto baltico obviae, desiderantur. Eandem rationem, si quendam maris Bahusiensis sinum, ab ostio in interiorem ejus partem, sequamur, observare licet: in ostio copiosae sunt Phyceae e Floridearum grege pulcherrimae; quanto longius vero in partem sinus interiorem progrediamur, tanto magis decrescit specierum numerus, ut Phyceae virides tandem solae restent, cujus causa, quamquam e pluribus aliis rationibus nascitur, in decrescente salsitudine praecipue est quaerenda. In maris Bahusiensis parte septentrionali, v. c. prope Koster, ubi ad oram occidentalem

aqua marina maxima in Suecia imbuta est salsitudine, plures leguntur Phycearum species, quae ex. gr. in mari prope Marstrand plane desiderantur.

Quantam denique vim in formas Phycearum explicandas et contrahendas exerceat major minorve salsitudo aquae, unicuique easdem species ex mari orientali atque occidentali conferenti facile patebit. Sic Fucus vesiculosus in mari orientali in formam, quae dicitur baltica, ita saepe contrahitur, ut a minus perito Phycologo vix agnosci possit; Phyllophora membranifolia $\beta$, ad Carlskrona obvia, ita est mutilata, ut illi speciei a me saltim non omni sine dubitatione sit relata; Leathesia difformis, in mari Bahusiensi biuncialis, in orientali mari semine Cannabidis plerumque vix est mjoor; Halicoccus nodosus in mari Norvegico, ubi aqua adhuc salsior est, quam in mari Bahusiensi, in omnibus partibus duplo fit major, ut inter specimina in litora Bahusiensia rejecta, utrum per undas e Norvegia et Jutlandia occidentali adportata fuerint, an indigena sint, dictu non sit difficile. Cum Phyceae, quibus major salsitudinis gradus necessarius est, in aqua minus salsa crescunt, vix nisi rarissime fructum proferunt; v. c. Asperococcus bullosus ad oram Hallandicam semper, quamquam prope Koster nunquam, fructu caret; Asperococcus echinatus ad litora Norvegica, quam ad Bahusiensia, multo est major, fructu pulcherrimo semper ornatus atque glaber, in mari vero Bahusiensi duplo l. triplo fit tenuior, villo densissimo saepe vestitus, sporocarpiisque parum evolutis occulte adspersus. Polysiphonia allochroa, P. aculeata etc., quae

mari orientali privae dicuntur, nunquam cum fructu lectae fuerunt, quamobrem mihi suspectae, forsan modo Polysiphoniae violaceae formae macilentae. Qui itaque Phyceas investigare studet, neque numerum specierum solummodo respicit auctum, is inter illa externa, sub quibus nascuntur Phyceae, momenta, majorem l. minorem aquae salsitudinis gradum nunquam sátis attente perpendere potest.

2. Profunditas maris ad vegetationem marinam ditandam vel depauperandam non parum valet; longe aliae in alto mari, quam vadoso, vigent species. Haec differentia tribus saltim modis in vegetationem marinam agit, nempe:

a. Salsitudine majori cum profunditate increscente: Cum variae Phycearum species majorem requirant salsitudinis gradum, et, ubi aqua dulcis l. minus salsa salsiori immiscetur, illa propter minus pondus specificum huic innatet, illae Phyceae, quo aqua sibi apta circumdentur, ut profundius in aqua crescant, necesse est. Ubi mare itaque minus profundum aqua dulci immiscetur, in eodem multae desiderantur Phyceae, quae, si profundius esset, in ipso fundo idoneam sibi invenirent stationem. Cum mari, secus oram occidentalem Sveciae extenso, non modo fluviis magna aquae dulcis copia adducatur, sed etiam per fretum balticum aqua parum salsa maris orientalis, dein litora Sveciae atque Norvegiae meridionalis sequens, in sinum Codanum effundatur, quo hujus aqua, saltim in superficie, saepissime longe minus est salsa, quam ad litora meridionali-occidentalia Norvegiae, quanti sit in sinu Codano, vegetationem Phyce-

arum si respicimus, ipsa profunditas maris, facile intelligitur. Haec ipsa aquae minus salsae l. dulcis copia, quae in sinum Codanum effunditur, praecipua caussa esse videtur, cur Phyceae in mari Bahusiensi profundius, quam in exteris maribus, crescant. Ubi, ex. gr. extra Sörö Hallandiae, fundus petrosus tantum 5—6 orgyas aquae submersus est, ibi multae desiderantur species, quae aliis locis valde sunt frequentes.

b. majori l. minori lucis intensitate. Quo profundius quaedum crescit Phycea, eo minus luce afficitur. Ut nonnullae plantae phanerogamae umbram quaerunt, aliae loca aprica, quin eodem modo variae Phyceae lucem nimis intensam effugiant, vix dubitari potest. Hae profundiorem aquam petunt. Plurimae Phyceae rubrae l. purpurascentes lucem effugere, virides autem expetere videntur. Nisi vehementius fallar, observasse mihi videor, Florideas, cum in limite aquae crescunt, locis potius septentrioni quam meridici obversis vigere, Phyceas vero virides, seu Ulvaceas, stationes oppositas praesertim seligere.

c. temperatura diversa. Temperaturam in vegetationem marinam vim quandam habere, vix denegari potest, quamquam de hac re nullae, quibus uti possimus, singulares adsunt observationes. Facile tamen patet, temperaturam in superficie aquae atque in fundo altiori, hoc loco atque in vadosis, praecipue arenosis, valde esse diversam. Anno 1843, mense Augusto, ubique fere prope Christineberg Bahusiae, propter calorem insignem et placidum eodem tempore mare, in limite maris emoriebatur Polysiphonia penicillata, postquam colorem

purpurascentem in flavum mutasset; idem de variis aliis speciebus, loca similia inhabitantibus, eodem anno a me est observatum; in alto vero simile aliquid nunquam vidi. Hyeme temperatura in fundo maris calidior est, quam versus superficiem, quae in Bahusia atque ad litora meridionalia Norvegiae glacie obducitur. Temperaturae in fundo maris vicissitudines, quam in terra, per annum longe minores. Aestate calidissima in fundo (1—14 orgyali) Thermometrum nunquam supra gradum 20 + adscendere observavi, nec hyeme infra 0 descendit. Inde clima in fundo maris valde mite; cum enim apud nos in terra gelu rigente (saepe 30 grad. attingente) plantae non raro necantur, in fundo maris vicini glacieque velati Florideae aliaeque Phyceae frondescunt atque florent, veluti in terris calidissimis plantae tempore pluvioso; ita in gremio maris vegetationis subtropicae umbra.

3. Violentia undarum. Si quis vegetationem marinam locis, quibus aqua maris undis violentis irruit, cum ea, quae in sinubus magis tranquillis gignitur, contulerit, magnam utriusque inveniet diversitatem. Hoc modo scopulus quisque maris Bahusiensis ad latus occidentale, quod undis violentis aperti maris infestatur, quam ad orientale minus turbidum, longe alias Phycearum species fovet. Ad illud adsunt Polysiphonia penicillata, Gloiosiphonia capillaris, Helminthora multifida, Chordaria flagelliformis, Cladostephus spongiosus, Conferva aerea etc.; ad hoc vigent praesertim Fuci aliaeque Phyceae, aquam tranquilliorem praeoptantes. Nonnullae Phyceae violentis undis gaudere viden-

tur, vel quum intensitas ipsius lucis his diminuitur, vel propter temperaturam, aqua continuo agitata, demissiorem. At alias simul adesse causas, minime denegare velimus.

4. Fluxus atque refluxus maris. Variae Phyceae omnia maria, in quibus nullus est regularis fluxus atque refluxus, plane effugiunt. De omnibus illis, quae offert mare mediterraneum, exemplis nil dicam, Fucum canaliculatum, Himanthaliam loream atque Alariam esculentam, omnes in mari Norvegico occidentali ubique obvias, sed in Bahusiensi plane desideratas, tantummodo memorans. Hae plantae a natura ita comparatae videntur, ut eas certis temporibus aëri exponi seu aqua denudari, sit necessarium. Plures quidem causae, cur in Bahusiensi mari non adsint, afferri possunt, v. c. minor maris Bahusiensis salsitudo; in Norvegia vero ex. gr. Fucus canaliculatus in interioribus sinuum partibus, ubi aqua saepe non magis salsa quam ad litora Bahusiensia est, non raro legitur, ex quo hujus proventus salsitudini majori haud tribuendus videtur. Haec species, quam reliquae fere omnes, magis est amphibia.

5. Indoles ipsius soli haud levis est momenti; at physicae illius qualitates, v. c. conglomerationis forma, chemicis longe antepollent. Gonidia enim atque sporae Phycearum, ut in plantas normales explicentur, matrici solidae et firmae est necesse affigantur. Inde sequitur, gonidia l. sporas in arena l. argilla, cujus particulae vi undarum semper turbantur, aegre germinare et vix umquam rite explicari, quo facile intelligitur,

cur omne litus, arena l argilla constitutum, nisi lapidibus conchis cochleisque adspersum sit, omni Phyccarum careat vestigio. Saxa, lapides, conchae, cochleae, crustae animalium crustaceorum atque moles ligneae ea sunt corpora, quibus potissimum affiguntur Phyceae; praeterquam quod multae aliis speciebus innascuntur. Ratione matricis hinc Phyceae in duas phalanges abeunt, 1) saxicolas dico (omnes enim in molibus ligneis etc. crescentes simul sunt saxicolae) et 2) parasiticas. Ad illas ut exempla referenda sunt: Fuci, Delesseria sanguinea, Laminariae, Hea Fascia, Helminthora multifida, Gloiosiphonia capillaris etc., de quibus tamen confiteri cogor, si in aliis parasitae inveniantur, hoc meam minime movere admirationem, cum Laminariam saccharinam et Alariam esculentam, utramque juvenilem, in Rhodomela subfusca crescentem ipse invenerim. Ut Phyceae mere parasiticae nominari possunt Elachista stellaris, Punctaria undulata, Callithamnia plurima, Aglaophyllum punctatum, Polysiphonia fastigiata etc.

Chemicam soli indolem minoris esse momenti, quam contenderunt multi auctores, maximo jure mihi contendere videor. Cum saxa creta ea quaedam species fugiant, hoc ex eo sequi videtur, quod particulae e saxis cretaceis undarum vi forsan continue dissolvuntur, quo fit, ut Phyceae quaedam in iisdem sedem satis firmam sibi acquirere non possint. Cum undae maris occidentalis nulla lambant formationis cretaceae saxa, nullas hac de re a me ipso factas observationes afferre possum; annotare tamen juvabit in crusta Cancri Aranei L., qui inter

Phyceas fundo petroso ubique ad nostra litora copiosissime adest, me saepissime 12 et plures Phycearum diversas species bene vigentes observasse; animal ita Phyceis saxicolis saepe onustum, ut vix nisi summa difficultate sese movere videatur. Ex quo Phyceas in calce, modo sit satis firma duraque, aeque bene ac in saxis formationis primitivae crescere, facile fingam. Phyceas enim e solo, cui insident, nutrimentum haurire, nemo quidem est, qui contenderet.

Hisce paucis indicatis, Phycearum ad nostra litora distributionem summatim consideremus. Ut enim plantae aëreae duplicem distributionem geographicam ostendunt, verticalem dico, a superficie maris in terminum nivis perennis, atque horizontalem, ab aequatore versus polos, ita et Phycearum distributionem infra aquae superficiem et secundum diversas telluris Zonas juvat attendere.

§. II. De verticali Phycearum in mari distributione. In mari Bahusiam alluente, in quo nostrae observationes institutae, solo petroso vegetatio Phycearum ad vigenti vel triginta orgyas descendit. In altiori fundo vix alias, quam formas valde diminutas Floridearum, praecipue Delesseriae sanguineae, inveni. Infra viginti et quinque orgyas vegetatio marina, sive specierum numerum sive pulchritudinem individuorum respicis, valde decrescit. Si itaque Bangiam crispam in nostris maribus duas l. tres pedes supra limitem maris superiorem, undis irrigatum, crescere memoria repetimus, Phyceas per 90 l. 100

pedes verticaliter esse distributas, veritati proximum videtur. Intra hunc terminum sequenti ordine distributae sunt:

1. Ulvaceae pro maxima parte extenduntur ab ulna una alterave supra limitem aquae superiorem (ubi Bangia crispa) usque in profunditatem 2—3-orgyarum. Plurimae vero species v. c. Conf. hormoides, C. aerea, C. arcta, C. centralis, Ulva stipitata, Enteromorpha intestinalis, E. compressa, Porphyra laciniata, Ectocarpi, Cladostephus spongiosus, inter superiorem aquae limitem atque inferiorem crescunt. Bryopsis Arbuscula ejusque comites Conferva rupestris, C. gracilis, Ectocarpus fasciculatus, Cladostephus verticillatus in fundo 2—3-orgyali præsertim bene vigent. Porphyra miniata atque P. coccinea solae in fundo petroso intrataeniensi 6—10-orgyali a me sunt inventae.

2. Fucoideae.

A) Episporeae.

a) Chordaricae plurimae, v. c. Elachista fucicola, Leathesia difformis, Chordaria flagelliformis, Chorda Lomentaria, in l. supra limitem aquae inferiorem crescunt; aliae contra, v. c. Elachista stellaris, Cruoria pellita, Mesogloia vermicularis atque M. virescens, in fundo 6—7-orgyali optime explicantur.

b) Dictyoteae. Ut inter priores seu Chordaricas nonnullae in limite maris optime vegetant, ita et inter Dictyoteas Ralfsia verrucosa, Asperococcus echinatus, Ilea Fascia,

Punctaria undulata in l. paululum infra limites aquae observantur; aliae contra non nisi in fundo 4—6-orgyali intrataeniensi ostrcifero adsunt, v. c. Asperococcus bullosus, Striaria attenuata, Dictyota dichotoma etc. Stilophora paradoxa cum in limite maris, tum in fundo pluriorgyali adest.

c. Sporochnoideae. Desmarestia viridis cum in limite aquae inferiori tum in fundo extrataeniensi obvia; Desmarestia aculeata in fundo triorgyali non raro inventa, inter omnes Phyceas Europae profundissime forsan crescit. E fundo 90 orgyas alto, inter Jutlandium atque Norvegiam sito, est extracta.

d. Laminaricae, paululum infra limitem aquae inferiorem crescere incipientes, distribuuntur in profunditatem 15—20 orgyarum; locis cum extra tum intrataeniensibus, Laminaria saccharina atque L. digitata. Alaria esculenta vero in limite aquae inferiori, locis aperto mari expositis, crescens, vix nisi rarissime (specimina juniora nunquam in magnitudinem solitam explicata?) a me saltim in profundiori inventa.

B) Cyclosporeae a limite aquae superiori usque in fundum 6 pedes altum crescunt. Supremus est Fucus canaliculatus, quem ordine sequuntur F. vesiculosus, Halicoccus nodosus, Fucus serratus et denique Halidrys siliquosa;

C) Florideae.

a) Ceramieae, quoad extensionem verticalem valde variant; crescit nempe Ceramium rubrum atque C. diaphanum

cum in limite maris, tum in fundo 25-orgyali. Species Callithamnii eadem ratione insignes sunt, at Callith. Turneri, C. Plumula atque C. Hookeri a me solummodo in fundo 9—10 orgyali extrataeniensi observatae sunt. Griffithsia corallina inhabitat plerumque fundum 6-orgyalem ostreiferum.

b) Cryptocarpeae. In limite maris leguntur Helminthora, Dumontia filiformis atque Chondrus crispus; in fundo 6—20-orgyali Furcellaria lumbricalis, Iridaea edulis etc.

c) Sphaerococcideae. In limite aquae l. superiori: Phyllophora mamillosa, Rhodomenia palmata, Gracilaria purpurascens, Delesseria alata etc.; in fundo usque 20-orgyali adsunt etiam non raro Rhodomenia palmata, Gracilaria purpurascens, et prae ceteris Rhodomenia laciniata, R. ciliata, R. cristata, Aglaophylla, Delesseria sanguinea, D. alata, D. sinuosa etc.

d) Rhodomeleae. In limite aquae superiori l. inferiori crescunt Polysiphoniae multae, v. c. P. Brodiaei, P. penicellata., etc, Rhodomela lycopodioides. In fundo 6—9-orgyali Chylocladia atque Lomentaria, Laurenciae. In fundo 12—20-orgyali Polysiphonia parasitica aliaeque hujus generis species.

His expositis iisque, quae infra de uniuscujusque speciei distributione allata sunt, collatis, certas quasdum, intra quas crescunt familiae, regiones vix circumscribi atque limitari posse,

facile intelligitur. Florideae in genere profundissime quidem crescunt, multae vero earum etiam in ipso limite aquae, nonnullaeque nunc illo loco, nunc in profundissimo habitant. Quae cum ita sint multaque huc pertinentia a me nondum satis explorata, nullas clare definitas regiones proponere valeo. Qui tales expositas optent, opera Cel. J. Agardhii *) et Cel. Oerstedi **) ut conferant, oro.

§. III. Distributio specierum ad litora marina Scandinaviae.

Litora Scandinaviae, a summo septentrionali Europae promontorio Nordkap usque in angulum Scaniae meridionali-occidentalem Falsterbo, et inde secus oras ejusdem provinciae Blekingiaeque per orientalem Succiae usque in intimum Sinum bottnicum, si sequamur, vegetationem marinam, diversitate et ipsius litoris et aquae salsitudine diminuta maxime diversam inveniemus. Ut ipsa vegetationis diversitas melius elucescat, diversas litorales regiones sigillatim adumbrare liceat.

I. Mare orientale, quod litora Succiae orientalia atque meridionalia usque in Skanör Scaniae lambit. Duae hujus maris partes:

a) Sinus bottnicus, seu mare a Torneå in Roslagiam extensum. Salsitudo hujus maris parva, quare vix alias enititur Phyceas, quam Confervas et Ulvas, aquae dulcis saepe simul incolas. Raro obvia est ulla Phycea vere marina, v. c.

*) Novitiae Florae Suecicae ex Algarum familia. Lundae 1836.

**) De regionibus marinis. Hauniae 1844.

Fucus vesiculosus, cujus nonnunquam specimen, procellis allatum, in parte sinus meridionalis, v. c. prope Gevaliam, in litus rejicitur.

b) Mare balticum, a Roslagia in Skanör extensum. Quo magis a septentrione versus meridiem progredimur, eo major fit salsitudo aquae et vegetationi marinae magis favens. Jam ad litora Roslagiae crescere incipit Fucus vesiculosus, ad Gottlandiam Ölandiamque Chorda Filum, Chordaria flagelliformis, Ceramium diaphanum; ad oram Scaniae Blekingiaeque Ectocarpi plures species, Elachista fucicola, Stilophora paradoxa, Ceramium rubrum, Phyllophora Brodiaei, P. membranifolia, Rhodomela subfusca etc. Plurimae vero, ut jam dixi supra, hujus maris Phyceae praebent tantum formas diminutas s. contractas, gracilescentes et vulgo steriles.

II. Mare occidentale Succico-Norvegicum apellamus a Skanör Scaniae usque in Lindesnaes Norvegiae extensum, litora occidentalia Sueciae nec non meridionalia atque orientalia Norvegiae alluens, quod a me praecipue lustratum ceteris plenius exploratum fingerem. A mari orientali tribus saltim momentis differt, nempe: 1:mo majori aquae salsitudinis gradu: 2:do intimo nexu cum mari septentrionali (Nordsjön), cujus sinus solummodo est, nec non 3:tio majori altitudine una cum fundo saepe petroso. Inde etiam hoc mare Laminariis bene explicatis, Halicocco nodoso, Deles-

seriis, Rhodomeniis Callithamniisque priori mari valde antecellit.

a) Fretum balticum (Öresund) atque Sinus Codanus seu mare occidentale a Skanör in insulam Winga extra Gothoburgum. Salsitudo maris, quo longius versus septentrionem, eo major; etiam in Freto baltico propter aquam maris Bahusiensis per idem influentem, at longe inferior quam ad terminum borealem s. Winga. Hoc vero fretum ad mare occidentale esse referendum testantur Laminariae, Delesseriae, Iridaea edulis, Rhodomenia palmata, multaeque aliae, quae in mari baltico plane desiderantur.

b) Mare Bahusiensi-Norvegicum, quod litora Bahusiensia atque Norvegica, inter Winga et promontorium Lindesnaes, ambit. Ut in illo mari, ita et in hoc, salsitudo septentrionem versus gradatim increscit, ut prope Koster aqua marina ad litora Sueciae maximum assequatur salsitudinis gradum. Ad insulas hujus regionis Ostreae optime vigent, quae meridiem versus prope Marstrand fere desinunt Cum Ostreis extra Gothoburgum l. prope Marstrand variae huic mari propriae species, v. c. Striaria attenuata, Asperococcus bullosus, Dictyota dichotoma, Griffithsia corallina, semper crescere desinunt. — Prope Winga plures Florideae, v. c. Callithamnion Hookeri atque C. Plumula, Chylocladia kaliformis, Bonnemaisonia asparagoides, Dasia coccinea aliaeque, meridiem versus desinunt. — Ceterum in parte hujus maris septentrionali fluxus maris atque refluxus,

quamquam momentis externis v. c. procellis saepe turbati, evidentiores sunt. In hac itaque parte, ubi aqua salsissima, ditissima in Suecia vegetatio marina.

III. Mare occidentale Norvegicum, quod extenditur a Capite Lindesnaes Norvegiae meridionalis in promontorium Nordkap. Tria praecipue momenta in vegetationem ditiorem promovendam hic agunt, scilicet: 1:mo salsitudo aquae, quae non modo baltici sed etiam sinus Codani superat: 2:do fluxus maris atque refluxus regularis saltim prope Christiansund 4—6 ulnas attingentes; 3:tio perennis maris deglaciatio *). — Hinc huic mari characteristicae sunt, secus oram totam Norvegiae occidentalem crescentes, Alaria esculenta, Himanthalia lorea, Fucus canaliculatus, Polysiphonia fastigiata atque Rhodomela lycopodioides.

A) Mare a Capite Lindesnaes usque in fines Nordlandiae litora Norvegiae alluens, ceteris omnibus, quae litora Scandinavica inundant, maribus specierum numero atque pulchritudine antecellit. Huic characteristicae variae Florideae in mari Bahusiensi-Norvegico nunquam l. sporadice tantum lectae, v. c. Rhodomenia laciniata, R. ciliata, Aglaophyllum punctatum, A. laceratum aliaeque. Forsan in omnibus nostris maribus nulla adest Phycea, quae in hoc non crescat. Hic respicere licet

a) Vegetationem pelagicam seu Phyceas in extimis rupibus, in quas ipse oceanus irruit, crescentes. Huc pertinent Ala-

*) Inter Lindesnaes et Egersund, hieme acerrimo, aqua in sinubus glacie nonnunquam obducitur, at longius septentrionem versus nunquam.

ria esculenta, Himanthalia lorea, Phyllophora mamillosa, Polysiphonia fastigiata, Rhodomela lycopodioides v. s. p. In profundo oceano Nitophylla, Florideae, Delesseriae, Rhodomeniae etc.

b) Vegetationem sinuum majorum, in eo differentem, quod in illis desiderantur omnino Alaria, Himanthalia, Phyllopb mamillosa, Polysiphonia fastigiata, Rhodomela lycopodiodes, Aglàophylla etc. — Quae in sinubus majoribus Norvegiae occidentalis inveniuntur Phyceae, eaedem fere sunt, ac maris Bahusiensis. Ita paucissimas solummodo memoria repetere possum Phycearum species Bahusienses, quas in sinu Moldensi non legerim. Hoc modo vegetatio illius Sinus cum vegetatione marina Bahusiensi longe magis quam cum vegetatione pelagica prope urbem Christiansund convenit.

IV. Vegetatio Scandinaviae marina cum Angliae collata. Si illam maris atlantici partem, quae litora europaea alluit, distributionem Phycearum geographicam respicientes, in regiones dispertiri vellemus, duae prae ceteris Phyceae, unaquaeque suae regioni characteristica, se praeberent. Hae sunt Alaria esculenta atque Laminaria bulbosa, quarum illa crescit circiter a Lat. gr. 72 in Lat. gr. 54 l. 52., et haec ab his circiter gradubus in Lat. gr. 36. — Utraque secum ducit vegetationem marinam valde dissimilem. — Regio Alariae esculentae paucissimas solummodo possidet sibi proprias species, quarum insigniores sunt Halymenia ramentacea, Rhodomenia cristata, Rhodomela lycopodioides, O-

donthalia, Fucus distichus etc. Regio vero Laminariae bulbosae abundat speciebus privis. Scandinavia tota intra regionem Alariae esculentae posita. Scandinaviam si cum Anglia conferamus, hanc duos l. tres circiter gradus Lat. intra regionem Laminariae bulbosae porrectam videmus, unde major specierum numerus, quo scatet Angliae Flora, derivatur. Quam Phycearum pauper, si cum Angliae conferatur, sit Flora Scandinaviae, e sequente computatione facile patebit.

I. Ulvaceae. *) Plurimas hujus subclassis familias non solum propter earum aequalem fere per orbem distributionem geographicam, verum etiam ob specierum apud diversos auctores limitationem diversam, h. l. computare non possum. De Siphoneis solummodo annotare licet, genus Codii in maribus Anglicis quattuor habere species et in nostris nullam. Quod ad ceteras vero Ulvaceas pertinet, aeque multas in maribus Scandinavicis ac in Anglicis crescere putarem. Melius distributionem geographicam illustrant

II. Fucaceae.

Ord. 1. Episporeae.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Fam. 1. Chordaricae | spec. in Scand. | 14. | in Angl. | 16. [1]) |
| — 2. Dictyoteae . . . . . | — | 15. | — | 17. [2]) |
| — 3. Sporochnoideae . . . . | — | 2. | — | 6. |
| — 4. Laminaricae . . . . . | — | 5. | — | 4[3])-32-43. |

*) Sequor h. l. Cel. Harvey, Manual of British Algae. London 1842.

1) Dubia Conf. curta Harv. Man. exclusa.

2) Laminaria debili et L. Fascia, unam speciem constituente, huc relatis, et Asperococco pusillo excluso.

3) Lam. debili et L. Fascia, una specie, ad Dictyoteas relatis, et L. Phyllitide, varietate L. saccharinae, exclusis.

| | | | |
|---|---|---|---|
| Ord 2 Cyclosporeae. | | | |
| Fam. 5. Fuceae . . . . . | 8. | — — | 12 [1])-8—12. |
| Ord. 3. Florideae. | | | |
| Fam. 6. Ceramieae . . . . . | 16. | — — | 43. [2]) |
| — 7. Cryptocarpeae . . . . . | 8. | — — | 15. |
| — 8. Sphaerococcideae . . . | 20. | — — | 56. [3]) |
| — 9. Rhodomeleae . . . . . | 22. | — — | 58 [4])-66-152. |
| | | | Scand. 106. Angl. 187. |

Ex quibus itaque sequitur, Floram Britannicam 82 Fucaceārum habere species, in maribus Scandinaviae nunquam inventas; et, si opus illud Harveyi conferimus, plurimas has species ad litora Brittanniae meridionalia, quae intra regionem Laminariae bulbosae sunt sita, inveniri videbimus. Quae vero intra Regionem Alariae esculentae in maribus Britannicis inventae sunt species, apud nos nondum lectae, sunt praecipue Delesseria Hypoglossum, Nitophyllum Bonnemaisoni, Rhodomela pinastroides, Lomentaria articulata, Gelidium aculeatum et nonnullae aliae, quae omnes olim forsan ad litora occidentalia Norvegiae invenientur.

---

1) Exclusis Fuco Machayi atque Cystoseira barbata.

2) Exclusis dubiis speciebus Callith. purpureo, C. fasciculato, C. Grevillei, C. spinoso, C. versicolori, C. repente, C. secundato et C. lanuginoso, ad Ulvaceas relato, additisque Ceramio Acanthonoto, C. flabelligero et C. echinato J. Ag. Advers. et Ceram. diaphano, varietate C. rubri, cum hoc conjuncto.

3) Rhodomenia sobolifera et Nitophyllo versicolori haud adnumeratis.

4) Polysiphonia purpurascente, P. atropurpurea, P. affini, P. Richardsonii, P. Carmichaelianà, P. fibrillosa, P. Grevillei, P. stricta, et P. elongella propter incertam differentiam specificam non adnumeratis.

## PHYCEAE.

Plantae protogeneae, agamae, aqua nutriente submersae, continuae vegetationis, quarum systema vegetativum, seu Thallus, sive cellula solitaria, sive pluribus plus minus conformibus, at nunquam in vasa transmutatis, constructus, gelatinosus, imo coriaceus, modo uniformis, modo in partes cauli atque foliiformes discretus. Multiplicatio per cellulas, diverso modo e thallo segregatas, Gonidia l. Sporas.

Lichenes atque Phyceas, ut inter plantas Homonemeas Fr., seu Thallophyta Endl., fungis opponantur, ut fecerunt Linné, Fries, atque Endlicher, in cohortem esse conjungendas equidem non dubito. Utrisque nomen illud Linneanum "Algae", sensu strictiori, esse reservandum cum Fries credrem potissimum. Fungi, ex organismis putrescentibus nutrimentum haurientes, vera hysterophyta, thallo fere obliterato, fructificatione vero semper praevalente ipsamque plantam constituente. Lichenes autem atque Phyceae e medio ambiente, aëre scilicet vel aqua, nutrimentum haurientes, vera protophyta, thallo eximie explicato et praevalente ipsamque plantam constituente, fructificatione vero parum perspicua saepeque non praesente. — Lichenes atque Phyceae tam sunt affines, ut nullam plane, nisi quod illi aëre, hae vero aqua circumdantur, utrorumque, quae non haberet eamque memorabilem exceptionem, tradere potuerint auctores differentiam. Thallus in genere nullam plane offert notam. Item fructificatio. Si nempe v. c. primam Parmeliae cujusdam fructificationis evolutionem

cum Fucorum, et Sphaerophori cum nonnullarum Floridearum sporocarpiis conferre lubet, quae essentialis intersit differentia, nescio sane. — Thalamium, quod dicitur, Lichenum cum sporocarpiis Dictyotearum bene convenit in essentialibus. Asci in Lichenibus plerumque plurispori, at idem etiam in variis Phyceis v. c. Fucis est observatum, et praecipue in generis Lenormandiae (Montagne Annal. des Sc. nat. 3:e Ser. Bot. tom. I. t. II. f. 2. g.) ascis plures adsunt sporae, Lichenum simillimae.

Multiplicatio Phycearum, quae divisione ipsius individui efficitur, ut eam omissam faciam, cellulis, e planta materna segregatis novaque daturis individua, fit semper. Ut Lichenibus ita et Phyceis hae cellulae duplicis sunt generis, Gonidia atque Sporae, quorum differentia, quantum hoc usque sit cognitum, in structura consimili quaeri non potest, sed in diverso eorum evolutionis modo est invenienda atque, illo perpenso, definienda, ni "ad libitum" nunc illo nunc hoc termino uti liceret, quod desideriis artis minus est consentaneum. Cum Muscis tum Lichenibus cellulas, nulla peracta thalli seu systematis vegetativi metamorphosi, immediate e systemate vegetativo segregari nova daturas plantae maternae individua, res videtur omnibus nota. Neque in Muscis neque in Lichenibus hae cellulae unquam nominatae fuerunt sporae, sed gonidia; in Phyceis vero, quod in Lichenibus est inauditum, duplex fere semper memorata fuit atque descripta fructificatio, neque de gonidiis quidquam, Fries in Flora Scanica atque Kützing in Phycologia sua generali si omissos facias, tradiderunt Phycologi Quae cum ita sint, multaque Phycearum organa, ab auctoribus

sporae habita, vix hac denominatione digna mihi videantur, si gonidiorum differentiam atque sporarum definire conor, forsan excusabor.

I. Si systematis vegetativi, v. c. thalli, cellula solitaria, nulla vicinarum thalli cellularum peracta metamorphosi, grandescens (i. e. vitam per se, a vicinarum cellularum consociatione vitali se separans, agere incipiens) intra suam membranam (perigonidium) unam, quattuor l. plures format cellulas, denique e planta materna segregatas nova daturas ejusdem individua — haec l. hae cellulae nominantur Gonidia.

II. Si systematis vegetativi, i. e. thalli, pars quaedam, i. e. plurium cellularum vicinarum complexus, metamorphosi in systema proprium fructificativum (Sporocarpium) transmutatur, quod intra se fovet cellulas denique e planta materna segregatas nova hujus daturas individua, hae cellulae nominantur Sporae.

Gonidia itaque nomino "sporidia" Confervarum, "sporas" Zygnematum atque Vaucheriae, "capsulas" Ectocarpi, "semina sparsa" Dictyotearum, "fructum acrospermum" Fucorum atque "sphaerosporas" sive "tetrachocarpia" Floridearum. Secundum hanc nostram gonidiorum atque sporarum definitionem, Ulvaceis sporae desunt, *) quod, ut puto, multis videbitur contensio ridicula; longe vero mihi visum est satius notione Sporarum

*) Ego quidem non primus. In Flora Scanica Cel. Fries de Ulvaceis dicit: gonidiis tantum multiplicatae; et Cel. Lunardini eandem Ulvaceas Gonidophyces nominat. Cfr. Saggio die Classificazione naturale delle Ficee. Venezia 1843.

certum quidquam atque definitum comprehendere, quam hoc nomine quamcumque cellulam, qua novum procreatur plantae individuum, intelligere. Si enim spora, ut hic factum est, non definiatur, unaquaeque cellula, modo ea novum plantae individuum existere possit, est spora, tuncque me plane fugit, cur non gonidia etiam Lichenum nominentur ita. Quod saepe cellulae illae, utrum gonidia potius an sporae sint nominandae, dictu difficile esse potest, nil refert, cum et apud superiores plantas de denominatione aptiori unius alteriusve organi contendatur non raro. Hic adest res nondum cognita, cujus propter causam notiones definitas spernere non licet. —

Gonidia, respectu eorum intra maternam cellulam (perigonidium) evolutionis, triplicis sunt generis, nempe:

1. Massa gonimica, in cellula materna (perigonidio) inclusa, in plures (quam quattuor) cellulas minores, maturas motu plus minus vivaci (an semper?) praeditas, transmutatur. Hae cellulae nominantur Schizogonidia, cellulaque materna speciatim Perischizogonidium.

Schizogonidia itaque nomino "sporidia" Confervarum. In Ulvaceis saepissime explicantur et in ceteris Phyceis non semper desiderari videntur. Ita nempe in Mesogloia a Cl. J. Agardh et in Ralfsia a me observata sunt. Forsan semper se movendi facultate praedita sunt.

2. Massa gonimica, in cellula materna (perigonidio) inclusa, in unum coalescens circumdatur membrana cellulari, quo existit intra cellulam maternam nova cellula, quae a me nomina-

natur Hologonidium, cellulaque materna speciatim Perihologonidium.

Hologonidia nomino "capsulus externas" Vaucheriae, sporas Zygnematum, Ulvarum, a Kützing nuper descriptas et depictas, atque Confervarum, v. c. Confervae vesicatae, "capsulas" Ectocarpi atque Sphacelariae, "semina sparsa" Dictyotearum, "fructificationem acrospermam" seu "antheridia" Fucorum nec non "opsecospermata" (Kütz.) Laminariearum. — Inter Schizogonidia atque hologonidia ea saepe interest ratio, ut, in qua cellula materna (perihologonidio) se explicaret hologonidium, in eadem, metamorphosi quasi inferiori, loco illius se explicentur interdum schizogonidia.

Ita nempe in perihologonidiis Ectocarporum, metamorphosi regressivo, loco hologonidii formantur schizogonidia, ut "sporidia," quae dicuntur, Confervarum, moto vivacissimo ante germinationem praedita. — Quod denique ad hologonidia Fucaccarum seu "fructificationem acrospermam" pertinet, quamquam eadem longe alio modo declarare conatus est Cel. Decaisne (Annales d. Sv. nat.; cfr. sub. Fuceis), propter analogiam tamen eisdem eandem functionem ac "seminibus sparsis" seu hologonidiis Dictyotearum non possum non adscribere, usquedum omnium eorum, quae hologonidia nomino, organorum natura melius cognita fuerit.

3. Massa gonimica, in cellula materna (perigonidio) inclusa, in quattuor dividitur partes, quarum unaquaeque circumdatur membrana cellulari, ut quattuor existant cellulae, quae a me

nominantur Tetragonidia cellulaque materna speciatim Peritetragonidium.

Huc pertinent "sphaerosporae" (J. Ag.) seu "tetrachocarpia" (Kütz.) Floridearum; saepe in receptaculis propriis explicantur, quare forsan a multis non ad gonidia referenda videantur. Tamen et hic analogia adest; cum enim in Lichenibus (v. c. in Sticta), tum in Marchantiis gonidia in conceptaculis propriis adsunt. Haec ceterum tetragonidiorum in Floridcis receptacula vix ita sunt nominanda; sunt enim nil aliud quam partes foliiformes l. ramuli thalli juniores, in quibus, propter telam cellularum debiliorem, tetragonidia facilius quam in partibus thalli aetate magis duratis procreantur. Ut in genere apud Lichenes gonidia atque fructificatio in diversis speciminibus saepissime adsunt, ita etiam tetragonidia atque sporocarpia in Floridcis.

Me quidem non fugit, Cell. *Decaisne* *) atque *Nägeli* **) tetragonidia Floridearum sporas, i. e. veram harum plantarum fructificationem, propter quaternariam illorum in cellula materna formationem, qua cum pollen plantarum superiorum tum sporae muscorum existunt, declarasse, sporocarpia vero Floridearum organa bulbillis superiorum plantarum l. conceptaculis Marchantiae analoga habuisse. Quamquam tetragonidiorum analogiam atque granulorum pollinis l. sporarum Muscorum minime denegare nolim, hanc tamen propter causam sporocarpia

*) Classification des Algues. Annales d. Sciences nat. 1842. vol. 17. (Ser Botanique).

**) Zeitschrift für wissenschaftliche Botanik, erstes Heft p. 47.

Floridearum bulbillis l. illis conceptaculis Marchantiae analoga minime habere possum. Sporocarpia verissimam esse Floridearum fructificationem, mihi persuasum est, quoniam: 1:mo in genere non solum cum Cyclosporearum, sed etiam cum sporocarpiis Lichenum evolutione conveniunt longe magis quam tetragonidia; 2:do organa sunt longe magis complicata, i. e. metamorphosi, quam tetragonidia, altiori exorta; 3:tio, si bulbillorum l. similium rerum sint analogon quidquam, neque sporocarpia Cyclosporearum, neque Lichenum, si quid valeat analogia atque evolutio, vera esse possunt fructificatio, quae essent in Lichenibus — forsan gonidia?; 4:to nulla audita est lex: *ubi quattuor cellulae in cellula materna formantur, sporae sunt.* — Quibus omnibus solummodo dicere volui, sporocarpia ("capsulas", "keramidia", "coccidia", "favellas" etc.) Floridearum veram fructificationem esse habenda, omniaque ea organa multiplicationis, quae nomine gonidiorum comprehendo, cum duplex ejusdem plantae fructus in natura adesse nequeat, usque dum melius cognita sit res, gonidia esse declaranda. Nec animo mihi fingere possum, quomodo sporocarpia Cyclosporearum veram fructificationem, Floridearum vero bulbillis analoga habere oporteret. — Quam parum revera valeat cellularum in materna cellula formatio quaternaria, e sequentibus omnibus patere credo.

In trabibus, aqua marina suffusis, crescit prope Christineberg Bahusiae Protococcus quidam: cellula sphaerica, in statu normali membrana cellulari simplicissima constructa, intus massa illa solita viridi vestita; inter hujus structurae cellulas, cel-

lulae aderant dissimilis structurae, ejusdem vero magnitudinis, nempe:

1. Cellulae intus cellulis pluribus minoribus refertae (Formatio Schizogonidiorum);

2. Cellulae intus viridi illa massa ornatae, in quibus autem circa eandem massam nova formata erat membrana cellularis ita, ut cellula Protococci duplici constaret membrana (Formatio hologonidiorum, seu hologonidium in perihologonidio inclusum);

3. Cellulae intus cellulis quattuor repletae (Formatio tetragonidiorum).

Ex his itaque sequi videtur: 1:mo alias etiam cellulas, quam granula pollinis atque sporas, numero quaternario in cellula materna formari *); 2:do, cum norma, qua formantur schizogonidia, hologonidia atque tetragonidia, jam apud cellulam Protococci sit expressa, formationi tetragonidiorum quaternariae nil inesse ita singulare, ut, eadem ducti, tetragonidia sporas habere possimus. Perigonidium est cellula per se vivens (i. e. e consociatione vitali ambientium cellularum segregata), veluti cellula illa Protococci, novas cellulas intra se pariens; quamobrem horum utrique triplex est novarum cellularum formationis modus **).

---

*) Parvo hoc exemplo ceterum minime, at observationibus Nägelii optime evictum. Cfr Wissenschaftliche Zeitschrift für die Botanik, erstes Heft.

**) De gonidiis Lichenum cfr. cetera in Fr. Lichenographia europæa. Lundae

## SUBCLASSIS I. FUCACEAE.

*Char. ess.* Asci l. Sporae in Sporocarpia formanda collecti.

Thallus rarius cellulis isomorphis, saepius vero heteromorphis, strata diversa formantibus constructus, olivaceus l. purpureus, capillaris, filiformis, frondosus l. in partes cauli- atque folii-formes discretus. Fructificatio: Asci l., illis resorptis, Sporae congestae l. aggregatae in Sporocarpia diversae formae, nunc in thallo externa, nuda l. excipulo recepta, nunc intra thallum nidulantia. — Multiplicatio etiam per gonidia, quae schizogonidia, hologonidia l. tetragonidia.

Ab Ulvaceārum subclasse haec differt vera fructificatione (indeque propagatione), i. e. Sporocarpii, in illis plane desiderati, formatione. Cum enim in Ulvaceis, ut infra videbimus, cellulae solummodo thalli sparsae, seu solitariae, intra se formant schizogonidia l. hologonidium, novas datura plantas, in Fucaceis contra ad Sporocarpium formandum plurium thalli vicinarum cellularum requiritur metamorphosis. Tamen et Fucaceis adest Ulvaceārum per schizogonidia atque hologonidia, quibus in Florideis accedunt tetragonidia, multiplicatio, quo facile intelligitur, Sporocarpia esse organa altiori metamorphoseos gradu exorta, et cum fructificatione, quae dicitur, seu organis multiplicationis Ulvaceārum minime commutanda.

Ordo I. Cyclosporeae. *Char. ess.* Sporocarpia excipulo sphaerico, Ascis filisque paraphysoideis undique e pariete in-

---

1831, et in Flora Scanica. Upsaliae 1835, in qua Cel. Fries alteram Phycearum fructificationem gonidia declaravit.

teriori excipuli centrum spectantibus constituta, intra stratum corticale poro pertusum in thallo l. in receptaculis propriis nidulantia. Perihologonidia in sporocarpiis.

Thallus stratis cellularum plerumque tribus constructus, olivaceus, cyathiformis, filiformis l. plus minus explanatus l. planus, ramosus, pinnatus l. dichotomus, nunc omnibus partibus isomorphis, nunc in cauli-atque foliiformes, propria receptacula fructificationis atque vesiculas aëreas discretus, alveolis punctiformibus, fila confervoidea emittentibus saepe adspersus. Receptacula Sporocarpiorum nunc terminalia, nunc lateralia, nunc axillaria, simplicia l. ramosa. Sporocarpia intra stratum corticale locata, extus tuberculiformia, poro per stratum corticale communicantia, excipulo filis cellularum strati intermedii formato. Asci subobovati, elliptici l. globosi, altero apice ad parietem interiorem excipuli adnati, altero centrum spectantes, sporas 2—8 continentes; fila paraphysoidea plerumque simplicia. Hologonidia, in supremis filorum tuncque ramosorum paraphysoideorum cellulis formata, nunc in diversorum individuorum, nunc in diversis ejusdem l. in iisdem cum sporis sporocarpiis obvia.

Ascos Fuccarum non unicam, sed 2—8 continere sporas, quod jam quattuor abhinc annis observavi, Cel. *Decaisne* (Annales des Sc. nat. 1845) ornate exposuit. Qua de re non est dubitandum. — Fructum acrospermum, quem dixit *Montagne*, sive a me nominata Hologonidia, Fucorum longe vero alio modo declarat Cel. *Decaisne*, ut jam dictum est supra. Equi-

dem eadem cum hologonidiis Dictyotearum non possum non analoga habere; granula in illis inclusa, ciliis motuque praedita, schizogonidia in hologonidiis Ectocarpi speciatim l. schizogonidia in genere potius, quam fila spiralia in antheridiis muscorum in memoria mihi revocant. Schizogonidia Confervarum etiam una l. pluribus ciliis esse donata, observationibus atque figuris, quas dedit *Thuret* (Annales des Sc. nat.), omnibus est cognitum.

Utrum Cyclosporeae an Florideae agmen ducant Phycearum, inter auctores incertum videtur. At consideranti, 1:mo thallum in Cyclosporeis (v. c. Sargasso) in partes cauli-atque foliiformes tam eximie saepe discretum, 2:do fructificationem in receptaculis propriis (Sargassi axillaribus) receptam, nec non ascos plurisporas, *Sargassa*, genus ditissimum atque subtropicum constituentia, in tota Phycographia suprema habere mihi par esse videtur. Denique Cyclosporeae ab Ulvaceis, cum quoad thallum tum quoad fructificationem, notis definitis sunt segregatae; Episporeas vero Elachista et Florideas Trentepohlia cum Ulvaceis, non modo thalli verum etiam fructificationis respectu, concatenare videntur. In limite inter Cyclosporeas atque Florideas positus videtur *Ctenodus Labillardierii*, analyses fructificationis, quas dedit *Montagne* (Annal. des Sc. nat. 1844), si respicimus. Cyclosporeae in serie itaque supremae.

Fam. I. Cystosireae. *Char. ess.* Thallus partibus foliiformibus discretis, Sporocarpia gerentibus, l. in Receptacula atque Vesiculas transeuntibus.

## I. HALIDRYS *Lyngb.*

Thallus filiformis, compressus, vesiculis lanceolatis intus septatis ramentisque foliiformibus. Receptacula lateralia, podicellata. Asci atque perihologonidia in iisdem sporocarpiis.

1. Halidrys siliquosa *Linn.*

Fucus siliquosus *Linn. Sp. ed.* 1. *v.* 2. *p.* 1160. *Fl. Sv.* — *Wahlenb. Lapp. p.* 498. — *Ag. Syn. p.* 2.
Halidrys siliquosa *Lyngb. Hydr. p.* 37. *t.* 8 *C.*
Cystoseira siliquosa *Ag. Spec.*

In scopulis lapidibusque unam alteramve orgyam sub aqua demersis, a Freto Baltico per totam oram Scandinaviae occidentalem, cum in interioribus sinubus tum in exterioribus, usque in litora Finmarkiae frequenter. Ab autumno usque in menses *Jun.* et *Jul.* sequentis anni fructificans.

Callus radicalis in omnibus nostris Cyclosporearum speciebus longe maximus, diametro unciam l. saepe duas aequans. Thallus, nondum vesiculiferus l. fructificans, ramentis foliaceis, semilineam l. lineam circiter latis unciamque et ultra longis, linearibus uninerviis, quorum superiora in receptacula atque inferiora in vesiculas abeunt. Dejectis receptaculis atque vesiculis, utrorumque in thallo remanent cicatrices.

Fam. II. Fuceae. *Char. ess.* Thallus nullis partibus foliiformibus discretis. Sporocarpia in eodem sparsa l. in Receptacula propria collecta.

## II. HALICOCCUS *Aresch.*

Thallus compressus, subdistiche ramosus, vesiculis immersis. Receptacula marginalia, podicellata, decidua. Asci atque perihologonidia in diversorum individuorum sporocarpiis.

1. Halicoccus nodosus *Linn.*

Fucus nodosus *Linn. Sp. ed.* 1. *v.* 2. *p.* 1159. — *Wahlenb. Lapp. p.* 449. *Ag. Syn. p.* 3.
Halidrys nodosa *Lyngb. Hydr. p* 37. *t.* 8 *B.*
β *furcatus*: thallo subteriti sterili, ramis elongatis basi attenuatis subregulariter dichotomis apice furcatis. Tab. I.

In scopulis lapidibusque in superiori limite aquae, cum in interioribus tum exterioribus mari aperto non nimis expositis sinuum partibus, a Freto Baltico per totam oram Scandinaviae occidentalis usque in litora Finmarkiae, ubique frequenter. — *Martio* atque *Aprile* fructificare incipiens jam ante finem Junii omnibus receptaculis caret. — Var. β in fundo arenoso-limoso, Zostera vestito, ulnari l. orgyali, v. c. ad Blåbärsholmen et ad Långegap prope Fiskebäckskil Bahusiae, *Jul.* lecta.

Thallus nonnunquam fere subdichotomus, potissimum subdistiche ramosus, apicibus saepe furcatis, partitionibus elongatis simplicibus. Receptacula subgloboso-elliptica, longe podicellata, i. e. in ramulis marginalibus simplicibus distichis terminalia, cum his, seu podicellis, decidua; quibus dejectis eorum loco pronascuntur aestate novi ramuli, in quorum apicibus denuo, tempore allato, nova receptacula formantur. Asci maturi sporas quattuor includunt. Forma β certe memorabilis, at vix varietas dicenda, cujus vegetatio loco inepto est retardata, sine difficultate ad suam speciem refertur. — *Chordaria scorpioides* Lyngb. Hydr. p. 50 t. 13 A., quo nomine et specimina detersa *Halidr. siliquosae* distribuuntur, alia hujus indolis videtur forma, licet non eadem ac nostra supra descripta.

## III. FUCUS *Linn.*

Thallus teres, compressus l. planus, dichotomus l. pinnato-dichotomus, vesiculis nullis l. immersis. Receptacula apicibus

thalli plus minus intumescentibus formata, persistentia. Asci atque perihologonidia in diversorum individuorum l. in iisdem sporocarpiis.

Genus in plura, ut fecit *Decaisne*, e sporarum in ascis numero et illarum atque hologonidiorum proventu, dividere mihi naturae plane contrarium videtur. Si talibus characteribus niterentur genera, eorum numero nullus sane esset modus. De Fucis dioicis atque monoicis nullum verbum perdere volo; ad genera enim dividenda minime valet sporarum in diversis l. in iisdem cum hologonidiis sporocarpiis proventus, nec ulli in mentem venit v. c. *Rumicem Acetosellam* atque *R. Acetosam*, quod dioici sunt, a genere *Rumice* segregare.

1. Fucus vesiculosus *Linn.*

Thallo superne plano costato dichotomo integerrimo, vesiculis binis subsphaericis l. nullis, receptaculis planis lanceolatis l. inflatis subsphaericis. *Tab. II. A.*

Fucus vesiculosus *Linn. Sp. ed.* 1. *v.* 2. *p.* 1158. — *Fl. Sv.* — *Lyngb. Hydr. p.* 1. *t.* 1. *A.* — *Ag. Syn. p.* 4.

Fucus divaricatus *Linn. Sp. l. c. p.* 1159.

β. *spiralis:* thallo breviori evesiculoso spiraliter torto, receptaculis sphaericis.

Fucus spiralis *Linn. Sp. ed.* 1. *v.* 2. *p.* 1159. — *Fl. Sv.* — *Lyngb. Hydr. l. c.* β.

α. thallo plano — *Aresch. Alg. Scand. exs. n.* 3.

γ. *inflatus:* thallo vesiculis apicem versus confluentibus inflato

F. inflatus *Linn. l. cit.* — *Lyngb. l. c.* γ.

δ. *chondriformis:* thallo angusto lineari evesiculoso, costa evanescente.

Fucus vesiculosus *var.* chondriformis *Ag. Nov. p.* 13.

ε. *balticus:* thallo evesiculoso pumilo costato l. ecostato lineari l. filiformi.

Fucus balthicus *Ag. Sv. Bot. t.* 516. — *Sp. Alg. v.* 1. *p.* 91.

Ad scopulos lapidesque in superiori limite aquae, cum sinuum interiorum tum exteriorum mari aperto non nimis expositis locis, a litoribus Ostrogothiae per oram Sveciae orientalem atque meridionalem nec non occidentalem Scandinaviae totius, usque in fines ultimos Finmarkiae, ubique copiosissime; β in scopulis declivibus, ab undis minus vehementibus lambitis; γ ad oras Nordlandiae Finmarkiaeque nec non ad Lillesand Norvegiae meridionalis (Schübeler); δ in portu prope Kärringön Bahusiae (J. Ag.); ε in mari baltico praesertim ad litora Blekingiae. — Toto anno.

Species, ut vulgatissima, ita et maxime variabilis, ut inter illam atque sequentem vix ulli exstent limites. Forma cum thalli tum receptaculorum nunquam constans. Quod ad illum attinet, in aqua profundiori longior fit latiorque, vesiculis nox destitutus, mox, apicibus superficiem aquae attingentibus, vesiculis magnis atque numerosissimis ornatus. In superiori aquae limite normalis adest forma; in hac thallus angustior; vesiculae nunc adsunt, nunc desiderantur, nunc sphaericae sunt, nunc ellipticae, modo binae, modo ternae — et sic in ceteris; receptacula modo globosa, modo compressa l. complanata, lanceolata l. subelliptica, integra l. biloba, tripartita etc. — Insignis forma, a Cel. *Fries* prope Stenby Hallandiae et a me prope Christineberg Bahusiae lecta: thallo angustiori et tenniori, fere *F. ceranoidis*, receptaculisque complanatis bipartitis. partitionibus lanceolatis, ceterum habitu, si staturam breviorem nec non ramos laterales multifidos *F. ceranoidis* non respicis, hunc plane referens. Ex eodem autem, cum *F. vesiculoso* vero, callo radicali enatum quoniam vidi, quin ad illum pertineat dubitare nequeo.

### 11. Fucus ceranoides *Linn.*

Thallo superne plano pinnato-dichotomo integerrimo evesiculoso, ramis lateralibus multifidis, receptaculis tumescentibus lineari-acuminatis. Tab. II. B.

Fucus ceranoides *Linn. Sp. ed.* 1. *v.* 2. *p.* 1158 — *Fl. Sv.* — *Ag. Syn. p.* 7. — *Lyngb. Hydr p.* 1.

Ad litora Finmarkiae *(Linné)* et in Bukkefjord Norvegiae occidentalis legit mihique communicavit *Blytt.*

Species, quod jam dixi, a priori distinctu difficillima, formas illius numerosissimas si respicimus. Thallus quam in illa angustior atque tenuior, ramos laterales multifidos et fructificantes emittens; receptacula complanato-compressa linearia-acuminata. In his omnes notae, quibus *F. ceranoides* atque *F. vesiculosus* inter se differunt. Specimina seu formae intermediae (cfr. supra) rem difficiliorem reddunt. Specimina Blyttiana: Callus radicalis parvus. Thallus 4—6-pollicaris pinnato-dichotomus, costa perspicua ima basi denudata, lineam l. paululum ultra latus substantiaeque tenuioris, rami nunc oppositi nunc subsecundi, maxima pro parte plus minusve regulariter dichotomi; receptacula nunc linearia, nunc cuneata, emarginata l. bipartita, partitionibus linearibus.

3. Fucus distichus *Linn.*

Thallo superne subcostato dichotomo integerrimo evesiculoso, receptaculis lanceolatis acuminatis.

Fucus distichus *Linn. Syst. ed.* 12. *v.* 2. *p.* 716. — *Ag. Syn. p.* 1 — *Lyngb. Hydr. p.* 6. *t.* 1. *C.*
Fucus ceranoides *Wahlenb. Lapp. p.* 490.

"Nordlandiae plerumque in scrobiculis et recessubus litoralibus aqua marina semper repletis nec sub refluxu maris evacuatis per promontoria insulasque exteriora sat frequenter. Circa Rörstad, ubi *Linné* sub itinere lapponico Fucos legit, vulgaris est." — *Wahlenb.* l. c.

Priore mihi fere obscurior planta Scandinavica, cujus specimina certa atque completa e nostra pennisula vidi nunquam.

E Grönlandia atque mari albo mihi tantum nota, quare citatos auctores, ut conferant lectores, oro.

4. Fucus serratus *Linn.*

Thallo superne plano costato dichotomo grosse serrato evesiculoso, apicibus receptacula constituentibus planis.

Fucus serratus *Linn. Sp. ed.* 1. *v.* 2. *p.* 1158. — *Wahlenb. Lapp. p.* 489. — *Ag. Syn. p.* 6. — *Lyngb. Hydr. p.* 5. *t.* 1 *B.* — *Alg. Scand. exs. n.* 1.

Ad scopulos lapidesque plerumque infra limitem inferiorem aquae, cum sinuum exteriorum tum interiorum locis mari aperto non nimis expositis, a freto baltico per totam oram Scandinaviae occidentalem usque in litora Finmarkiae supremae, ubique frequentissime. Toto anno.

Species parum mutabilis, cujus varietates insigniores apud nos vidi nunquam; in aqua 1—2-orgyali crescens "e centro undique imbricatim radians est, quo pulvillos circulares in fundo maris efficit", ut bene apud *Wahlenb.* l. c. — Secundum Cel. *Decaisne* asci hujus speciei maturi 8 includunt sporas.

5. Fucus canaliculatus *Linn.*

Thallo superne canaliculato ecostato dichotomo integerrimo evesiculoso, receptaculis turgidis ellipticis l. oblongis integris l. bipartitis. Tab. II. C.

Fucus canaliculatus *Linn. Syst. ed.* 12. *v.* 2. *p.* 716 — *Wahlenb. Lapp. p.* 795. — *Ag. Syn. p.* 8 — *Lyngb. Hydr. p.* 6. *t.* 1. *D.* — *Alg. Scand. exs. n.* 2.

Ad scopulos declivos in superiore aquae limite, ubi sub refluxu maris omnino denudatur, cum ad ostia tum in partibus interioribus sinuum Norvegiae omnium, a Stavanger usque ad litora Finmarkiae. Toto anno.

Thallus usque 6-pollicaris lineamque circiter latus, quam in prioribus fere crassior. Canaliculatio, cum plures saepe horas aëri exponatur planta, inaequali inferioris atque superioris paginae exsiccationi sine dubitatione adscribenda. — Asci atque hologonidia in iisdem sporocarpiis; illi 2 sporas, quantum vidi, continent semper.

## IV. HIMANTHALIA *Lyngb.*

Thallus primitus subglobosus dein expanso-subcupulaeformis. Receptacula e centro thalli loriformia dichotoma. Asci atque perihologonidia in diversis individuis.

### 1. Himanthalia lorea *Linn.*

Fucus loreus *Linn. Syst. ed* 12. *v.* 2. *p.* 716. — *Wahlenb. Lapp. p.* 499. — *Ag. Syn. p.* 8.
Himanthalia lorea *Lyngb. Hydr. p.* 36. *t.* 8. *A.*

Ad scopulos mari aperto expositos, in limite superiore aquae, ut sub refluxu omnino denudetur, a Norvegia meridionali per totam oram ejus regni meridionalem atque occidentalem usque in litora Nordlandiae ubique frequenter. — In litora Bahusiensia, e Jutlandia occidentali l. Norvegia undis adportata, ejicitur saepe, v. c. in insulis extra Fiskebäckskil et ad Koster, in Bahusiensi vero mari minime crescens. — Maj — Sept.

Ordo II. Florideae. *Char. ess.* Sporocarpia glomerulo Sporarum rosearum, filis paraphysoideis rarius intermixtis, constituta, nunc externa nuda l. tecta, nunc interna. Peritetragonidia in thallo sparsa l. in receptaculis plus minus transmutatis propriis recepta, rarissime nulla (?)

Thallus, nunc unica ecorticata l. plus minus corticata cellularum serie constructus, nunc tribus l. pluribus cellularum stratis conflatus, roseus l. purpurascens, capillaris, filiformis, frondosus, membranaceus, imo in partes cauli-atque foliiformes discretus, vario modo ramosus l. partitus. Sporocarpia: glomerulus sporarum, qui l. *externus*, et tunc nunc nudus, i. e. excipulo nullo, nunc excipulo unicellulari aut cellulloso receptus, l. *internus*, i. e. intra stratum thalli corticale nidulans et tunc excipulo spurio, cellulis ambientibus thalli formato, inclusus; excipulum nunc clausum nunc poro pertusum. Sporae in ascis inter se liberis l. seriatis solitariae l. quattuor formatae, nunc e sporophoro egredientes, nunc in globulum congestae. Tetragonidia cruciatim, zonatim l. triangule in peritetragonidio discedentia.

Florideae, ut antea dixi, quam Cyclosporeae in Phyceārum serie inferiorem tenere locum mihi videntur. In illarum infimis thalli structura eadem plane ac in Conferva, v. c. in generibus *Trentepohlia*, *Spermothamnio*, *Griffithsia* etc., ipsa ceterum fructificatio, v. c. in *Trentepohlia* atque *Spermothamnio*, ab hologonidiorum (ex. gr. fructuum, qui dicuntur, illorum externorum atque racemosorum in Vaucheriis variis, Sphacellariis aliisque) in Ulvaceis formatione parum abehorret.

Fam. III. Rhodomeleæ. *Char. ess.* Sporocarpia, glomerulo Sporarum intra excipulum cellulosum apiceque poro pertusum recepto constituta, in thallo externa l. prominentia, ovata, globosa l. haemisphaerica.

Thallus tribus plerumque cellularum stratis constructus, capillaris, filiformis, frondosus l. membranaceus, interdum in partes cauli-atque foliiformes discretus, rarius calce obductus tumque fragilis. Sporocarpia ut in charactere dato rarissimeque apice subclausa. Sporae e fundo excipuli l. sporophoro

plus minus columnari pyriformes l. in globulum congestae tuncque interdum subseriatae, in ascis solitariae l. quattuer formatae. Peritetragondia in ramulis nunc immutatis, nunc plus minus receptaculiformibus nidulantia, interdum nulla.

1. *Thallus* ecalcareus flexilis. Sporae e fundo excipuli pyriformes. Tetragonidia in receptaculis l. in ramulis plus minus transformatis, utrisque subsiliquaeformibus.

## V. ODONTHALIA *Lyngb.*

Thallus planus, subcostatus, in segmenta pinnatisecta divisus. Sporocarpia subovata, e margine thalli podicellata, Sporas e sporophoro erectas pyriformes includentia. Peritetragonidia in receptaculis marginalibus ramosis, duplice serie disposita, tetragonidiis triangulatim secedentibus.

### 1. Odonthalia dentata *Linn.*

Thallo pinnatifido, segmentis basi angustioribus, lacinulis linearibus apice dentatis.

Fucus dentatus *Linn. Syst. ed.* 12. *v.* 2. *p.* 718. — *Gunn. Fl. Norv. v.* 2. *p.* 91.

Sphaerococcus dentatus *Ag. Syn. p.* 22.

Odonthalia dentata *Lyngb. Hydr. p.* 9. *t.* 3. *A.* — *Alg. Scand. exs. n.* 27.

In fundo petroso extrataeniensi, 8—12 orgyas alto, a freto baltico per totam oram Sveciae occidentalem, v. c. inter Buskär et Wargö copiosissima atque pulcherrima, usque in sinum Christianensem Norvegiae; dein per totam hujus regni oram, v. c. extra Bergen (Koren), usque in litora Finmarkiae (Gunnerus). Toto anno, mensibus Decembris Martiique fructificans.

Thallus usque 12-pollicaris, in statu recenti coloris pulchre vinoso-rubri, exsiccatione nigrescentis, laciniis 2—3 lineas latis, Sporocarpiis podicellatis receptaculisque peritetragonidiorum margine nudo oculo quasi ciliatus. — Synonymon Gunneri pro more mihi non omni caret dubitatione.

## VI. RHODOMELA *Ag.*

Thallus teretiusculus, filiformis, ramosus l. ramulosus. Sporocarpia subovata, breviter podicellata, Sporas e sporophoro erectas pyriformes includentia. Peritetragonidia in ramulis intumescentibus, unica l. duplici serie disposita, tetragonidiis triangulatim secedentibus.

### 1. Rhodomela lycopodioides *Linn.*

Thallo primario elongato subsimplici ramulis simplicibus l. ramulosis secus longitudinem dense imbricatis obsesso.

Fucus lycopodioides *Linn. Syst. ed.* 12. *v.* 2. *p.* 717. — *Gunn. Fl. Norv. v.* 2. *p.* 80. — *Wahlenb. Lapp. p.* 305.
Furcellaria lycopodioides *Ag. Syn. p.* 11.
Gigartina lycopodioides *Lyngb. Hydr. p.* 45.
Rhodomela lycopodioides *Ag. Sp. v.* 1. *p.* 377.

In stipite *Laminariae digitatae*, in infimo refluxus limite, saltim a Bergen (Koren) per totam oram Norvegiae occidentalem, v. c. ad Christiansund frequentissime, usque in litora Finmarkiae (Gunnerus). Toto anno, ab Octobr. mens. usque in Martii fructificans.

Ex eodem callo radicali plura emittuntur fila fusco-purpurea, exsiccata nigra, pedalia, nunquam fere ramis instructa, sed per totam longitudinem ramulis subsetaceis, 2—3 lineas longis, simplicibus l. ramellosis, obsessa; horum nonnulli,

sparsi tamen atque rariores, autumno magis magisque fiunt ramellis instructi, in longitudinem pollicarem ultraque excrescentes. Fructus a me non inventus, sequentis similis secundum auctores.

2. Rhodomela subfusca *Woodw.*

Thallo primario ramoso, ramis ramulis crebris setaceis subpinnatis obsessis.

Fucus subfuscus *Woodw. in Linn. Trans. v.* 1. *p.* 131. *t.* 12. (Grev.)
Sphaerococcus subfuscus *Ag. Syn. p.* 32.
Gigartina subfusca Lamour. *Lyngb. Hydr. p.* 47. *t.* 10. *A. B. C.*
Rhodomela subfusca *Ag. Spec. v.* 1. *p.* 378. — *Alg. Scand. exs. n.* 54.

In inferiore aquae limite, *Fucis* adnata, l. in fundo 1—12 orgyas alto, cum extra- tum intrataeniensi, a Freto baltico per totam oram Scandinaviae occidentalis saltim usque ad Bergen (Koren). Toto anno; Octob. — Mart. fructificans.

Thallus coloris fusco-rubri 6—8 pollicaris, ramulis semilineam circiter distantibus. — Planta diversis anni temporibus, habitum si respicis, sat diversis ludit formis. — In mari saltim Balusiensi, a mense Aprili l. Majo usque ad Octobrem sterilis solum invenitur, ceteris anni mensibus sporocarpiis ornata atque tetragonidiis. Mense vero Octobris in thallo primario, tumque denudato (i. e. ramulis plus minus destituto), ad ramulorum dejectorum insertiones excrescit penicillus, semilineam lineamve longus, ramosus, tetragonidia, et tunc in ramum illis ejectis excresens, l. sporocarpia portans. Sporocarpia ad penicilli ramos sita, cum breviores rami sunt atque majori illorum copia onusti, corymbosa (ut Turn. Hist. t. 10 fig. f. g); cum vero longiores sunt rami atque copia sporocarpiorum minor, sporocarpia secus ramorum longitu-

dinem disponuntur solitaria (ut apud Turn. l. c. fig. k. l.). Hanc dissimilitudinem apud *Kützing* (Phyc. gen.) novae speciei, scilicet *Lophurae gracilis* Kütz., characterem sistere vidimus. — Saepe ramuli thalli non destruuntur; tunc in eorum apicibus excrescit penicillus, qui l. tetragonidiferus est l. strerilis, utroque in casu in ramum brevi transmutandus.

## VII. DASYA *Ag.*

Thallus filiformis, tubo centrali et cellulis elongatis circa hunc superimpositis fastigiatis constructus, inferne corticatus, ramosus, ramulis confervoideis. Sporocarpia ovato-urceolata, Sporas e sporophoro erectas pyriformes includentia. Peritetragonidia in series transversales in receptaculis lanceolatis ad ramulos adnexis disposita, tetragonidiis triangulatim secedentibus.

### 1. Dasya coccinea *Huds.*

Thallo ramis ambitu lanceolatis l. oblongis bipinnatis, pinnis pinnulato-multifidis, pinnulis confervoideis cellulis diametro subaequalibus.

Conferva coccinea *Huds. Fl. Angl. p.* 603 (Ag.)
Ceramium coccineum *Dec.* — *Lyngb. Hydr. p.* 124.
Dasya coccinea *Ag. Spec. v.* 2. *p.* 119.
Dasya coccinea β tenuis *Alg. Scand. exs. n.* 56.

In fundo petroso subextrataeniensi, praecipue conchifero plurium orgyarum, a Vinga extra Gothoburgum per totam oram Bahusiensem usque ad Koster non infrequens. Sept. — Oct. fructificans.

Thallus 6—8 pollicaris, coloris amoene rosei, inferne crassitie fili emporetici. — Nostra forma, quam exterorum

tenuior, de cetero nullis characteribus constantibus diversa. In utraque ramuli seu pinnulae, quantum vidi, semper confervoidei.

## VIII. POLYSIPHONIA *Grev.*

Thallus filiformis l. capillaris, tubo centrali et cellulis elongatis (siphonibus) circa hunc superimpositis fastigiatis constructus, inferne ecorticatus l. corticatus, ramosus. Sporocarpia ovato-globosa, Sporas e sporophoro erectas pyriformes includentia. Peritetragonidia in apicibus thalli tumescentibus in seriem disposita, tetragonidiis triangulatim secedentibus.

Genus naturalissimum, limitationem specierum si respicimus, difficillimis certe est adnumerandum. Plurimae, quae dicuntur, species formis intermediis ita transeunt, ut quae verae sint species saepe difficillimum sit dictu. Ex altera tamen parte minime potest denegari plurimos auctores, quae verae sint species, in natura disquirere parum curasse, species novas describere tantum conantes; hoc optime testantur opera Kützingii, rem usque in ridiculum vertentis.

Ad species Polysiphoniae limitandas fructum, propter formam in omni fere specie consimilem, vix adhiberi posse, neminem fere fugit; neque praesentia ejus l. absentia, utrum thallus jam omnem suam attigerit evolutionem, an nondum sit explicatus, certo ostendit. Ita in speciminibus *P. violaceae* cum corticatis, seu thalli magis evoluti, tum ecorticatis, sporocarpia adsunt optime explicata; item in *P. Brodiaei* aliisque. Fructus itaque longe prius saepe adest, quam quartam suae evolutionis partem attigerit thallus. Ex quibus sequitur, thallum solum esse, ex quo characteres atque essentiales specierum notae hauriri possint; ipsam vero thalli indolem multimodo mutant sequentia:

1. *Aetas.* Plantam prius minorem esse quam majorem, res est ab omnibus concessa; major tamen minorve magnitudo apud auctores specificam dare differentiam videtur non raro. Sed et alias, quam magnitudinis, dissimilitudines in eadem specie efficit aetas: A) *Structura:* In junioribus speciminibus stratum corticale modo prorsus disideratur, modo adest pro minori parte, donec in speciminibus aetate provectioribus, v. c. *P. violaceae*, maximam thalli partem investit. Ad ipsam siphonum formam quod attinet, in speciminibus junioribus magis sunt elongati, in adultioribus vero extentione horizontali breviores fiunt, ex quo varietas longitudinis interstitiorum; in speciminibus junioribus variarum specierum siphonum numerus minor quam in adultioribus. Ita in *Polysiph. nigrescenti* maxime explicata vidi ad basin thalli, circa tubum centralem, siphones 15, in forma vero juniori ejusdem plantae eodemque loco observavi saepe siphones 7—10, formae (in sectione transversali) diversae et circa tubum centralem irregulariter dispositos. — B) *Habitum* si respicis, aetas thallo varias adfert modificationes. In speciminibus junioribus thallus saepe infra-capillaris, ramis ramulisque paucioribus; in vetustioribus idem multo crassior, ramis ramulisque densioribus. Ita ex. gr. *P. Brodiaei* junior gaudet ramulis subplane-distiche ramellosis, senior vero ramulis penicilliformibus. Eodem modo se habent specimina juniora atque adultiora *P. violaceae* (cfr. infra), quo etiam fit, ut seniora utriusque plantae specimina tam sint similia, ut saepe confundantur.

2. *Diversus fundus et salsitudo maris.* In fundo sano, ubi omnes Phyceae optime vigent, Polysiphoniae quoad omnes partes firmiores evadunt, cum contra in fundo, qui dicitur, mortuo, ubi plurimae majores Phyceae quasi putrescunt, eaedem longe tenuiores saepe sunt. Hic stratum corticale saepe non explicatur et siphones plerumque extenduntur, l. stratum corticale minorem tantum thalli partem obducit; fructus rarius adest, tetragonidia vero atque antheridia frequentia; color pur-

pureus l. ruber in plus minus dilutum abit. Idem fere in aqua minus salsa. Ita specimina e mari baltico, l. partibus interioribus sinuum, plerumque longe tenuiora nec non sterilia. — Quam mutabilis, structuram atque formam externam si respicimus, sit itaque Polysiphoniarum thallus, intellectu haud est difficile; innumeras tamen ejus in eadem specie dissimilitudines causis supra allatis adscribere non licet semper. In speciminibus *P. Brodiaei* vetustioribus, ab Honoratissima *Griffiths* communicatis, inveni circa tubum centralem ad basin thalli siphones 6—7; in meis vero Bahusiensibus, cum illis in omni ceterum re congruentibus, adsunt siphones 15, in junioribus e mari Bahusiensi saepe siphones 6—7, ut in speciminibus illis anglicis. In novis itaque describendis speciebus quam cauti esse debeamus, unicuique patet. Si enim omnem formam, ut fecit *Kützing*, nullo critico in natura instituto examine, speciem describere sit licitum, cujus dignitatis sit speciale hoc plantarum studium, equidem nescio. Qui tali modo rem herbariam excolere velint, ii similes videntur liberis, qui testulis colligendis certantes, numero illarum majori solum delectantur.

Trib. I. Thallus siphonibus 5—15, in inferiori saltim parte normaliter strato corticali, cellulis minoribus formato, obductus, ideoque ibidem continuus seu inarticulatus.

†. *Thallus normaliter dichotomus.*

1. Polysiphonia elongata *Huds.*

Callo radicali minori, thallo a basi fere dichotomo ramosissimo, ramulis sparsis, interstitiis inferioribus diametro brevioribus, superioribus eodem usque duplo longioribus.

Conferva elongata *Huds. Fl. Angl. p.* 599 (Ag.)
Hutchinsia elongata *Ag. Syn. p.* 54.
Ceramium elongatum *Roth. Lyngb. Hydr. p.* 117. *t.* 66. *D.* 1.

*A.* Ramuli saltim ecorticati, i. e. siphones eorum nullo minorum cellularum strato obducti.

*a.* ramis ramulisque firmioribus crassioribusque, interstitiis longitudine diametrum aequantibus.

*α.* thallo usque pedali, ramis ramulisque aequaliter dispositis.

*b.* thallo usque pedali, ramis plus minus fasciculato-congestis.

* pumila, 2-pollicaris, ramulis ex apicibus thalli primarii fasciculatis.
Hutchinsia elongata ε. sanguinolenta *Ag. Sp. v.* 2. *p.* 84.

*β.* ramis ramulisque tenuioribus, interstitiis diametro usque 2plo l. 3plo longioribus.

*c.* thallo usque pedali, ramis ramulisque aequaliter dispositis, interstitiis diametro 2plo longioribus.

* junior, ramulis apicibusqus roseis, interstitiis diametro 3plo longioribus.
Polysiphonia elongella *Harv. in Hook. Engl. Fl. v.* 2. *p.* 334. *Man. p.* 96.

*d.* thallo usque pedali, ramis plus minus fasciculato-congestis l. approximatis.

* Hutchinsia strictoides *Lyngb. Hydr. p.* 114. *t.* 35. *C.*
Hutchinsia Lyngbyei *Ag. Sp.* 2. *p.* 85.
Polysiphonia Grevillei *Harv. Man.?*

*B.* Thallus omnino fere corticatus, i. e siphones etiam ramulorum minorum cellularum strato obducti.
Hutchinsia elongata *β* denudata *Ag. Spec. v.* 2. *p.* 85.
Ceramium brachygonium *Lyngb. Hydr. p.* 118. *t.* 36. *C.*

In fundo petroso, cum extra- tum intrataeniensi, 1—12 orgyali, a Kullaberg Scaniae per totam oram occidentalem

Scandinaviae saltim usque ad Bergen (Koren); b* in scrobiculis rupium aquam marinam excipientibus non infrequens. Jun. — Sept.

Thallus explicatus, ut sequentis, basi crassissimus, semilineam fere aequans, ibidemque, quoad conspici possint, interstitiis diametro usque 4plo brevioribus, rarius ubique regulariter dichotomus, superne saltim sparse ramosus, quo et callo radicali a sequente differt. — Status hujus plantae, ut multarum, duplex, aestivalis (A) nempe atque hiemalis (B). Haec mensibus Aprilis atque Martii undique protrudit prolificationes, quae quoad habitum atque structuram cum *P. elongella* plane congruunt. Omnes itaque sub B allatas formas, qui evolutionem illarum prolificationum diligenter viderit, nemo distinctas habebit; sunt enim hoc prolificandi modo, sporis l. tetragonidiis exortae juniores formae. — Doleo quidem, me *P. elongellam* propriam speciem agnoscere non posse. In mari britannico haec planta melius forsan, quam apud nos, distincta videtur, at equidem nullas plane invenire potui notas, quibus a ceteris *P. elongatae* formis certe distingui possit. — Contra verba *Harveyi* de *P. elongella:* "but is easily and clearly distinguished by the distinctly jointed branches, and the parallel (not reticulated) veins which they contain", id tantum observare volo, ramulos in formis *c* et *d* aeque bene distincte esse reticulatos seu ecorticatos; quod ceterum ad "venas", sive siphones parallelos neque reticulatos pertinet, quales in *P. elongata* describuntur, cum haec tum *P. elongella* gaudent in ramulis ecorticatis siphonibus parallelis, cum contra interstitia corticata utriusque saepe illam ostendunt reticulationem. Paucis: *P. elongella*, quantum equidem observavi, junior mihi videtur *P. elongata*. Ramos ramulosque basi attenuatos *P. elongatae* adscribunt auctores; haec vero nota in formis *c* et *d* interdum plane evanescit.

### 2. Polysiphonia microdendron *J. Ag.*

Callo radicali majori, thallo e medio dichotomo, ramulis superioribus corymbosis, interstitiis longitudine diametro aequalibus l. brevioribus.

Polysiphonia microdendron *J. Ag. Linnaea* 1841. *p.* 29.

In scrobiculis scopulorum, aqua marina repletis undasque a procellis invectas excipientibus, insularumque exteriorum, a Balusia media, v. c. ad Kärringön et extra Christineberg, usque in Koster non infrequens. Jul. — Sept.

"Radix callus expansus magnus. Caules plures, basi simplices, prope medium et supra parce dichotomi, ramique continui. Ramuli ramosissimi fastigiati, articulati. Articuli diametro subaequales l. immo diminuo breviores, canalibus pluribus, geniculis obscuris. Stichidia vulgaris formae in ramulis superioribus. Color recentis dilute olivaceus l. purpureus ramulique rigidiusculi; in aqua dulci et aëre citissime mutata, color obscurior, rami mollissimi et conglobati evadunt."

"Ipsa dispositione ramorum praecipue distinguenda. P. Brodiaei forsan proxima, licet P. elongatae formam incautus potissimum judicaret." J. Ag. l. c.

Descriptionem auctoris adjungere mihi visum est satius. Ad *P. elongatam* structura (siphonibus 6—7) thalli ad basin fere omnino accedit, cum contra in speciminibus *P. Brodiaei* junioribus, in ejus societate crescentibus, equidem plerumque inveni 15 siphones; interstitiis vero nec non siphonibus ramulorum, ut affert J. Ag., cum *P. Brodiaei* potius convenit. — Thallus junior uncialis vix dichotomus, ramis undique fere obsessus habituque alieno, at quo magis in longitudinem excrescit, eo luculentius fit dichotomus, usque dum planta 3—5 uncialis habitum suum sibi inducrit satis characteristicum. Spo-

rocarpia ad ramulos corymbosos, ejusdem ac in priori specie formae.

† † *Thallus haud normaliter dichotomus ramosus.*

5. Polysiphonia nigrescens *Smith.*

Thallo basi 15-siphoneo noduloso nigrescente, ramulis subpinna-toramellosis, interstitiis infimis diametrum longitudine subæquantibus l. brevioribus, supremis eodem subduplo longioribus.

Conferva nigrescens *Smith. Engl. Bot.*
Hutchinsia violacea *a.* nigrescens *Ag. Syn. p.* 54.
Hutchinsia nigrescens *Lyngb. Hydr. p.* 109 *t.* 33. *C.* — *Ag. Sp. v.* 2. *p.* 69.
Polysiphonia nigrescens *Harv. in Hook. Engl. Fl.*
*β flaccida*: thallo tenuiori purpurascente, ramis ramulisque elongatis flaccidis remotis subhorizontalibus.

Paululum infra infimum aquæ limitem rupibus adnata, l. in Phyceis crescens in fundo plurium orgyarum petroso cum extra- tum intratæniensi, a Freto baltico per totam Scandinaviæ oram occidentalem saltim usque ad litora Finmarkiæ inferioris. Anno toto.

Thallus usque pedalis ramosissimus, coloris plerumque purpureo-nigrescentis l. apicibus (primo vere) roseo-purpureis (ut in Rhodomela subfusca), pulchre distiche ramulosis, inferne quam in ceteris speciebus crassior interstitiisque turgidis nec non ramis defractis sæpe subspinulosus. Optime differt hæc species, in plurimis saltim casubus, a formis nigrescentibus *P. violaceae* siphonibus 15 ad basin thalli circa tubum centralem dispositis. Sporocarpia subsphaerico-ovata. In forma *β* thallus basi vix interstitiis turgidis nodulosus, neque ramis defractis subspinulosus, ceterumque quoad omnes partes quam in *a.*

tenuior, et hoc modo ad formas varias *P. violaceae* accedens, licet numero siphonum allato diversus. An vero haec nota semper in explicatis sit constans, dicere non audeo.

### 4. Polysiphonia Brodiaei *Dillw.*

Thallo basi 7-15- siphoneo laevi purpureo elongato pauciramoso, ramulis pinnatis l. decomposito-pinnatis subplanis l. penicilliformibus, interstitiis superioribus diametro subduplo longioribus.

Conferva Brodiaei *Dillw. t.* 107.
Hutchinsia atrorubescens *Ag. Syn. p.* 58.
Hutchinsia Brodiaei *Ag. Sp. v.* 2 *p.* 63.
Polysiphonia Brodiaei *Harv. in Hook. Engl. Fl.* — *Alg. Scand. exs. n.* 57.

*a.* thallo primario ramoque uno alterove longiori ramos plano-distiche-pinnatos l. decomposito-pinnatos abbreviatos gerentibus.

*b.* thallo primario ramoque uno alterove longiori ramos decomposito-pinnatos penicilliformes elongatos gerentibus.

In inferiori aquae limite rupibus, ab undis maris non nimis aperti lambitis, adnata, a Hallandia superiori per totam Sveciae, v. c. optima ad Bondhålet prope Christineberg Bahusiae, atque Norvegiae oram occidentalem saltim usque ad Molde. Jun. — Aug.

Thallus semper coloris purpurei usque 8-pollicaris, nonnunquam ultra; fila e callo radicali plura elongata, ramis rarius longioribus, plerumque vero brevioribus patentibus longissime versus apicem corticatis. Sporocarpia subsphaerica vix podicellata.

### 5. Polysiphonia penicillata *Ag.*

Thallo basi 6-10-siphoneo laevi purpureo l. olivaceo elongato pauciramoso ramulis decomposito-pinnatis penicilliformibus subpatenti-recurvis obsesso, interstitiis superioribus diametrum aequantibus.

Hutchinsia Brodiaei *Lyngb. Hydr. p.* 109 *t.* 33. *B.*
Hutchinsia penicillata *Ag. Sp. v.* 2. *p.* 65.
Polysiphonia penicillata *Alg. Scand. exs. n.* 28.

In inferiori aquae limite ad scopulos exteriores violentiae undarum expositos, a Hallandia media per totam oram Bahusiensem frequentissime. Jun.—Aug.

Priori valde affinis; differt colore saepissime olivaceo l. flavescenti-rubro, filis omnibus sine ramis elongatis at secus longitudinem ramulis penicilliformibus nunc ellipticis nunc oblongis, omnibus ejusdem fere longitudinis, obsessis. Sporocarpia ut in priori, cujus varietas a multis habetur, quamquam equidem utramque haud male distinctam habeo. Neque haec prioris junior status, nam utraque saltim in mari Bahusiensi eodem tempore explicatur eodemque perit, certum sibi adsignatum locum, v. c. in Bondhålet prope Christineberg, unoquoque anno servans. Ceterum haec species jam e prima infantia habet ramulos penicilliformes, quod in junioribus prioris speciei speciminibus vidi nunquam.

### 6. Polysiphonia violacea *Ag.*

Thallo basi 5-8-siphoneo purpureo ramosissimo, ramis crebris, inferioribus longioribus, superioribus longitudine sensim decrescentibus, ramulis nunc patenti-ramellosis nunc penicilliformibus, interstitiis longitudine variis saepe longissimis.

*α. fibrillosa*: purpurascens l. nigrescens, thallo validiori longissime versus apicem corticato ramosissimo, ramis a basi usque cum ramulis crebre et subdistiche exeuntibus, interstitiis inferioribus diametro subduplo, superioribus sesquilongioribus l. idem aequantibus.

Hutchinsia fibrillosa *Ag. Syn. p.* 57 — *Lyngb. Hydr. p.* 115.
Hutchinsia expansa *Ag. Syn. p.* 57

In fundo cum extra tum intrataeniensi petroso, optima in illo 7-8 orgyas alto; at ceterum multis locis in aqua minus profunda, a litoribus Blekingiae per totam oram Scandinaviae occidentalem saltim usque ad Christiansund Norvegiae. Jun. — Sept. Color nunc plus minus purpurascens, nunc nigrescens, et tunc haec forma cum formis tenuioribus *P. nigrescentis* confluere videtur. In reliquas vero *P. violaceae* formas, quarum cum multis promiscue crescit, aperte abit.

*β Sub-Brodiaei*: rubra l. purpurea 7-8-pollicaris, thallo longissime apicem versus corticato, basi valido superne capillari, ramulis oblongo-penicilliformibus, interstiti ecorticatorum inferioribus diametro subduplo longioribus, superioribus idem subaequantibus.

*b.* recens purpureo-nigrescens, exsiccata subnigra.

In fundo extrataeniensi petroso 7-8-orgyali v. c. extra Christineberg atque Koster Bahusiae cum priori sub innumeris formis. Jun. — Sept.

Non dubito, quin plerique hanc formam, praesertim si ex unico judicarent specimine, meram haberent *P. Brodiaei* varietatem, ingenueque fateor, me eandem loco potius quam aliis notis ab hac distinguere. Tam vero luculenter in *α* et *γ* abit, ut, millenis iterum iterumque in vivo examinatis speciminibus,

si cum *P. Brodiaei* conjungere vellem, etiam hanc cum *P. violacea* conjungere necesse esset — Forma *b.*, colore insignis, gaudet plerumque, cum adsunt Sporocarpia, ramulis plus minus penicilliformibus, et in formam *a.* aperte abit, illam cum *β.* conjungens.

*γ. violacea*: rubro-purpurascens, 4-8-pollicaris, thallo supra medium corticato, basi ultra setaceo superne capillari tenuiori et ramosissimo, ramis ramulisque sparsis, interstitiis ecorticatorum inferioribus diametro duplo longioribus, superioribus eodem sesquilongioribus.

Hutchinsia violacea *Ag. Sp. v. 2. p. 76.*

*b.* thallo basi tenuiori exsiccatione nigrescenti, ramis ramulisque distantibus patentibus, interstitiis longioribus.

*c.* thallo quoad omnes partes validiori nigrescente, interstitiis subbrevioribus.

In fundo plurium orgyarum praesertim petroso extrataenensi, a Hallandia saltim septentrionali per totam oram Bahusiae frequenter, saepe promiscue cum formis *α. β.* et *δ.* Ceterum et multis aliis minus profundis locis, Phyceis increscens. — Jun.—Aug. Haec forma cum sequente, in fundo altiori petroso, innumeris formis intermediis aperte confluens, altera ex parte in *β.* aeque bene abit; inter utramque omnino intermedia; *b.* est forma insignis, thallo basi tenuiori supra medium saepe corticato, et ita tamen, ut longitudo interstitiorum bene per stratum corticale parum armato oculo conspici possit; *c.* est forma cum *β b.* analoga, in statu saltim exsiccato subnigrescens.

*δ. bulbosa:* rubra l. purpurea 4-8- pollicaris, thallo usque ad medium corticato, basi vix setaceo superne capillari tenuissimo et ramosissimo, ramis ramulisque patentibus, interstitiis inferioribus diametro 6—8-, superioribus 4—5-plo diametro longioribus.

Polysiphonia bulbosa *v. Suhr. Alg. Scand. exs. n.* 9.
* Hutchinsia tenuis *Ag. Spec v.* 2 *p.* 76.

*b.* thallo validiori, ramulis subpenicilliformibus, interstitiis brevioribus.

In Phyceis tenuioribus parasitica in fundo pluriorgyali petroso cum extra- tum intrataeniensi, per oram Bahusiensem, v. c. extra Hälsö et Fiskebäckskil; in mari Norvegico prope Mandal (Blytt); l. in inferiori limite aquae ad scopulos mari non nimis expositos, v. c. ad Släp Hallandiae borealis. Jun.—Aug.

Forma δ. colore atque tenuitate certe insignis ut, nisi diligentissime examinavissem, distinctam speciem facillime haberem; tamen in formam γ. in fundo petroso extrataeniensi, sine ullo limite tam aperte abit, ut distingui nequeat. — *Hutchinsiam tenuem* Ag, quamquam nulla vidi specimina originalia, huc pertinere eo minus dubito, quod in interioribus sinubus, v. c. ad Varholmen extra Gothoburgum, legi formam *P. violaceae* cum descriptione illa ab Ag. data bene convenientem. — In *P. tenui* longitudo interstitiorum minor quidem describitur quam in nostra est forma, at haec longitudo usque in infinitum variat

ε. *tenuissima:* dilute-rosea, 4-8- pollicaris, sterilis, thallo ecorticato l. ima tantum basi corticato ibidemque setaceo, superne capillari tenuissimo ramosissimo, ramis ramulisque patenti-excurvatis, interstitiis inferioribus diametro 4-5-superioribus 5-7-plo diametro longioribus.

*b.* thallo paululum altius corticato, ramis ramulisque patentibus.

In fundo 2-4- orgyali submortuo petroso sinus Gullmarsfjorden Bahusiae prope Lysekil. Jul.—Aug. lecta.

Forma omnium tenuissima sæpeque longissima. Thallus nunc omnino ecorticatus siphonibusque plerumque quattuor circa

tubum centralem, donec in uno alterove specimine numerus eorum augeri incipit. Denique in *b.* ex ima basi apicem versus magis magisque extenditur stratum corticale; rami ramulique minus quam in *c.* patenti-excurvati, mox patentes, quibus omnibus haec forma in *γ.* denique aperte abit. — *Hutch. divaricata* Ag. huc saltim pro parte pertinere mihi videtur.

Plures hujus polymorphae speciei formas recipere nolo, ne receptas quidem memorabiles habens; eas in illum solum attuli finem, ut hujus speciei variandi modus melius elucescat. Qui enim hanc speciem examinare velit, neque sola in limite maris crescentia specimina, sed ea etiam, quae in alto crescunt, respicere, is, quam lubricum sit atque anceps novas Polysiphoniae condere species, facile intelliget Ingenue fateor, *P. Brodiaei*, *P. penicillatam*, *P. nigrescentem* atque *P. violaceam* esse species habitu atque statione quidem diversas, minime vero characteribus firmioribus circumscriptas. Immo mihi adest *P. violaceae* forma, in Fuco vesiculoso crescens, quae charactere a *P. penicillata* vix distingui possit; innumerae solum formae intermediae illam ad *P. violaceam* pertinere me edocuerunt. In mari anglico aeque bene ac in nostro quin variat haec species minime dubito; quae enim nomine *P. violaceae* a Cel. *Ralfs* mihi communicata est planta, est nostra *P. violaceae γ b.* Specimina Griffithsiana vero inter *γ.* et *δ.* tenent locum intermedium. — *P. fibrillosa J. Ag. Alg. med. et adr.*, secundum auctoris specimina, optime correspondet variis *P. violaceae α.* speciminibus. — *Hutchinsia Allochroa*, *H. aculeata*, *H. divaricata* Ag. Sp. v. 2 sunt mihi plane ignotae. Si e descriptionibus l. c. datis judicare liceret, easdem esse formas steriles *P. violaceae* minime dubitarem.

Trib. II. Thallus siphonibus 4-40, nullo strato corticali, cellulis minoribus formato, obductus, ideoque articulatus.

### 7. Polysiphonia byssoides *Good. et Woodw.*

Thallo basi 6-7-siphoneo pinnatim l. decomposito-pinnatim-ramoso, ramulis confervoideis multifidis penicilliformibus obsesso, interstitiis infimis diametro longitudine aequalibus, superioribus eodem duplo 1. triplo longioribus, sporocarpiis in penicilliformibus.

Fucus byssoides *Good.* et *Woodw. in Linn. Trans.* 3 *p.* 229 *(Ag.)*
Hutchinsia byssoides *Ag. Syn. p* 60. — *Lyngb. Hydr. p.* 110 *t.* 34 *B. C.*
Polysiphonia byssoides *Grev.* — *Alg. Scand. exs. n.* 10.

In fundo petroso 5-12-orgyali cum extra- tum intratacnicensi, a Freto baltico per totam oram Scandinaviae occidentalem saltim usque ad Bergen (Koren) frequentissima; at neque ad Molde neque ad Christiansund mihi obvia. Aestate tota.

Thallo usque pedalis, in recenti statu roseus l. plus minus purpurascens, exsiccatus coloris nigrescentis. Rami inferiores longiores, versus apicem thalli longitudine decrescentes, ad unumquodque geniculum pro more exeuntes. Ramuli penicilliformes alternatim distichi, in fila confervoidea soluta, cellulis diametro triplo saltim longioribus, multifida. Sporocarpia subsphaerica.

### 8. Polysiphonia fastigiata. *Ag.*

Thallo basi multisiphoneo vix attenuato dichotomo fastigiato, interstitiis diametro duplo l. triplo brevioribus, sporocarpiis terminalibus ovatis.

Fucus lanosus *Linn. Syst. ed.* 12 *v.* 2 *p.* 718.
Conferva polymorpha *Fl. Dan.* — *Wahlenb. Lapp. p.* 531.
Hutchinsia fastigiata *Ag. Syn. p.* 55. — *Lyngb. Hydr. p.* 108 *t.* 33. *A.*

In *Halicocco nodoso* parasitica in vicinia aperti maris, a Norvegia meridionali per totam regni oram occidentalem usque in promontorium Nordkap ubique frequentissima. In mari Balusiensi prorsus desideratur l. in Halicocco crescens, cum uno alterove illius specimine ab undis e Norvegia in litora Balusiensia adportatur. Tota saltim aestate.

Caespes usque triuncialis. Fila apicem versus parum attenuata, coloris purpureo-nigrescentis l. olivacei, siccata nigra; interstitia suprema in medio peritetragonidio notata, siphonibus 6—7 striata.

### 9. Polysiphonia parasitica *Huds.*

Thallo paucisiphoneo plano-alternatim decomposito-pinnato, interstitiis inferioribus diametro longioribus l. longitudine subaequalibus, superioribus eodem 2plo brevioribus, sporocarpiis — — —.

Conferva parasitica *Huds. Fl. Angl.*
Hutchinsia Möstingii *Lyngb. Hydr. p.* 116. *t.* 56. *B.*
Hutchinsia parasitica *Ag. Sp.*

Florideis adnata in fundo petroso pluriorgyali extrataeniensi, a Winga per totam oram Balusiensem usque in Koster, at ubique rarissima. Jul. — Sept. lecta.

Thallus purpureo-roseus vix pollicem apud nos longus, plano-pinnatus, circumscriptione ovatus l. oblongus, eleganter duplicato-pinnatus, pinnis pinnulisque ad unumquodque geniculum alternatim egredientibus et versus apicem thalli primarii longitudine sensim decrescentibus. Fructus mihi ignotus.

### 10. Polysiphonia pulvinata *Roth.*

Thallo caespitoso quinquesiphoneo capillari vix attenuato ramoso, interstitiis infimis diametrum longitudine subaequan-

tibus, superioribus eodem usque duplo longioribus, ramulis subsecundis, sporocarpiis pyriformibus.

Conferva pulvinata *Roth. Cat.* 1 *p.* 187. *t.* 3. *f.* 4. — *Cat.* 2. *p.* 214.
Hutchinsia pulvinata *Ag. Sp. v.* 2. *p.* 109.
Polysiphonia pulvinata *Harv. Man. p.* 94. — *Alg. Scand. exs. n.* 60.

In scrobiculis rupium aquam marinam excipientibus, ab Hallandia saltim boreali per totam oram Bahusiensem usque in Koster, frequenter. Jul. — Sept. lecta.

Caespes apud nos coloris purpurei l. subdilute flavescentis, uncialis, subhaemisphaericus l. pulvinatus, basi unciam et supra diametro metiens. Interstitia media in meis saltim speciminibus diametro sesquilongiora, superiora vero idem saepe 2plo longitudine excedentia, sub microscopio visa tristriata. Rami ramulique plus minus secundi l. subsecundi. Sporocarpia in speciminibus Bahusiensibus a me nunquam inventa. Ab extera planta nostra ceterum aberrat thallo eximie caespitoso-pulvinato articulisque brevioribus.

### 11. Polysiphonia urceolata *Dillw.*

Thallo quadrisiphoneo capillari vix attenuato ramosissimo, ramulis patentibus l. recurvis, interstitiis inferioribus diametro 4—6plo longioribus, superioribus eodem sesquilongioribus l. subaequalibus, sporocarpiis subpodicellatis pyriformibus poro in rostrum producto.

Conferva urceolata *Dillw. Intr. p.* 82. *t. G.*
Hutchinsia urceolata *Hook. Fl. Scot.* — *Lyngb. Hydr. p.* 110. *t* 34. *A.* — *Ag. Sp. v.* 2. *p.* 71.
Polysiphonia urceolata *Hook. Engl. Fl.*
Conferva patens *Dillw. Intr. p.* 84. *t. G.*
Hutchinsia patens *Ag. Sp. v.* 2. *p.* 71.

Polysiphonia patens *Hook. Engl. Fl.* — *Alg. Scand. exs. n.* 58.
Conferva stricta *Dillw. t.* 40.
Hutchinsia stricta *Ag. Sp. v.* 2. *p.* 89.
Hutchinsia badia *Ag. Syn. p.* 56. — *Lyngb. Hydr. p.* 114. — *Ag. Sp. v.* 2. *p.* 74.
Polysiphonia stricta *Hook. Engl. Fl.* — *Harv. Man.*

In limite maris superiori rupibus rariusve Phyceis adnata, ab Hallandia septentrionali per totam oram occidentalem Scandinaviae, v. c. Bahusiae ad Christineberg in Bondhålet (optima), saltim usque ad Christiansund Norvegiae. Jun. — Jul., dein tabescens.

Caespes 5—8-pollicaris, valde intricatus. Fila nudo oculo crassitie aequalia, rosea, at aetate provectiora nigrescentia. Rami ramulique sparsi, sev nunquam secundi, hi nunc patentes, nunc recurvi, idque in eodem specimine. Longitudo interstitiorum varians, basi infima diametrum fere aequans, dein idem 6—8plo superans, in apicibus ramulorum denuo fere aequans. Sporocarpia, poro producto saepeque luculenter 3—4-dentato, optimam a sequente specie offerunt differentiam.

*Confervam patentem* Dillw. atque *Conf. urceolatam* Dillw. eandem esse speciem, nemo certe est, qui dubitet. Quae accepi undique *Hutchinsiae strictae* Auctor. specimina, ea non possum non *ad P. urceolatam* referre, nec ullam hoc nomine existere plantam distinctam credo. Quod ad *Hutchinsiam badiam* Ag. et Lyngb. attinet, equidem nulla originalia vidi specimina, at in Bahusiensi mari legi formam *P. urceolatae*, quae cum descriptionibus illius a Viris illis celeberrimis datis bene congruit, ut et illam plantam hujus formam habere cogar.

### 12. Polysiphonia roseola *Ag.*

Thallo quadrisiphoneo capillari vix attenuato ramosissimo, ramis ramulisque patentibus, interstitiis inferioribus diametro

4—6-plo longioribus, superioribus sequilongioribus l. subaequalibus, sporocarpiis subpodicellatis late-ovate acuminatis.

Hutchinsia stricta *Ag. Syn. p.* 56. — *Lyngb. Hydr. p.* 115. *t.* 36. *A.*
Hutchinsia roseola *Ag. Spec. v.* 2. *p.* 92.
Polysiphonia roseola *Alg. Scand. exs. n.* 59.

Phyceis adnata in fundo cum ostreifero intrataeniensi tum extrataeniensi pluriorgyali, a Freto baltico per totam oram Sveciae occidentalem usque in Norvegiam meridionalem. Jul. — Aug.

Species priori proxima differt non tantum caespite 5—6-pollicari et loco, sed etiam colore in viva planta plerumque pulchre rubro l. roseo filisque flaccidis minusque quam in illa intortis. Ramuli interdum, licet rarius, subsecundi. Sporocarpia basi late ovata e medio lineis rectis in porum acuminata, nonnunquam, quamquam rarissime, ut in priori, poro in rostrum subproducto, ex quo utriusque speciei intima affinitas perbene patet. Haec quasi illa in profundo crescens declarari posset, licet utramque bene vereque distinctam habeam.

2. *Thallus* ecalcareus flexilis. Sporae e sporophoro erectae pyriformes. Tetragonidia in ramulis immutatis.

## IX. BONNEMAISONIA *Ag.*

Thallus filiformis, compressus l. planus, ramosus, ramulis ciliiformibus distichis obsessus. Sporocarpia ovata sessilia l. podicellata, Sporas e sporophoro erectas pyriformes includentia. Peritetragonidia — — — —.

1. Bonnemaisonia asparagoides *Woodw.*

Thallo subtereti l. compresso, ramulis ciliiformibus alternis, sporocarpiis illis oppositis podicellatis.

Fucus asparagoides *Woodw. in Linn. Trans. v. 2. p. 29. t. 6.* (Grev.)
Bonnemaisonia asparagiodes *Ag. Sp. v. 1. p. 197. — Alg. Scand. exs. n. 52.*

In fundo petroso conchifero 6—8-orgyali in vicinia aperti maris, a Winga Bahusiae per totam ejusdem provinciae oram, v. c. ad Klädsholmen, Grundsund, Långö extra Fiskebäckskil, Grafvarne etc., usque ad Koster non infrequens. In mari Norvegico ad Solsvig extra Bergen (Koren) et ad Molde a me lecta. Jul. — Sept.

Thallus eleganter roseus, inferne ⅓ lineam vix crassus, longitudine usque 6-pollicaris, attenuatus, ramuli ciliiformes semilineam circiter distantes lineamque longi.

## X. LAURENCIA *Lamour.*

Thallus filiformis, teres l. compressus, ramosus l. pinnatus. Sporocarpia ovata, sessilia, Sporas, in series pyriformes e sporophoro erectas, concatenatas includentia. Peritetragonidia in ramulis sparsa, tetragonidiis triangulatim secedentibus.

1. Laurencia pinnatifida *Huds.*

Thallo subtereti l. compresso 2—3-pinnato, pinnis pinnulisque alternis, his apice tumescentibus peritetragonidiiferis.

Fucus pinnatifidus *Huds. Fl. Angl. p.* 58 (Ag.).
Laurencia pinnatifida *Lamour. ess. p.* 42.

β. thallo minori tenuiori subtereti.

Fucus pinnatifidus *var. angustatus Turn.*
Chondria pinnatifida *Ag. Syn. p.* 35.
Gelidium pinnatifidum *Lyngb. Hydr. p.* 40. *t.* 9. *C.*

Forma β, Fucis plerumque insidens, in fundo extrataeniensi 1—3-orgyali, l. in scrobiculis aqua marina repletis, a Kullaberg Scaniae per totam oram Scandinaviae occidentalem saltim usque ad Bergen Norvegiae (Koren). — Aestate.

Forma α. ad litora Britannica frequens, apud nos prorsus desiderata; inter eandem tamen atque β, speciminibus numerosissimis Gallicis atque Britannicis edoctus, cum auctoribus nullam plane video specificam differentiam. Forma β apud nos thallo gaudet vix plus quam 3-unciali, pinnis pinnulisque plus minus teretibus l. compressiusculis, colore nunc purpurascente, nunc lutescente l. virescente. Odor nauseosus.

2. Laurencia dasyphylla *Woodw.*

Thallo tereti vage ramoso, ramulis clavatis basi attenuatis apice obtusis peritetragonidiiferis.

Fucus dasyphyllus *Woodw. in Linn. Trans. v.* 2. *p.* 239. *t.* 21. (Grev.)
Chondria dasyphylla *Ag. Sp. v.* 1. *p.* 350.
Laurencia dasyphylla *Grev. Alg. Brit. p.* 112. *t. XIV. f.* 13-17.

In fundo ostreifero Segesâta dicto prope Koster cum Griffithsia corallina aliisque Phyceis rarioribus non infrequens. — Jul. — Aug.

Thallus ⅓ lineam latus et vix plus quam 3—4 pollices altus, ramis 1—2 lineas distantibus elongatisque obsessus; ramuli clavati medio peritetragonidiiferi. Sporocarpia in spe-

ciminibus Bahusiensibus vidi nunquam, neque apud *Greville* l. c. memoratas strias in iisdem observare potui.

3. *Thallus* ecalcareus flexilis. Sporae demum intra excipulum in glomerulum compactae. Tetragonidia in ramulis immutatis.

## XI. LOMENTARIA *Lyngb.*

Thallus filiformis, tubulosus, diaphragmatibus articulato-septatus, ramosus. Sporocarpia sphaerica l. ovata, Sporas denique in glomerulum compactas includentia. Peritetragonidia in ramulis sparsa, tetragonidiis triangulatim secedentibus.

### 1. Lomentaria kaliformis *Good.* et *Woodw.*

Thallo diaphragmatibus internis extus articulato-constricto composito-subpinnato, sporocarpiis globosis.

Fucus kaliformis *Good. et Woodw. in Linn. Trans. v.* 3. *p.* 206. *t.* 18. (sec. Grev.)
Gastridium kaliforme *Lyngb. Hydr. p.* 70.
Chondria kaliformis *Ag. Sp. I. p.* 536.
Chylocladia kaliformis *Hook. Engl. Fl.* 2. *p.* 298.

In fundo intrataeniensi ostreifero l. subextrataeniensi conchifero, a Bahusia meridionali mediaque, v. c. ad Långö extra Fiskebäckskil, Grafvarne etc, usque in Koster, ubi in fundo Segesåta praesertim insignis atque frequens; secus oram Norvegicam saltim usque ad Molde et Christiansund. Jul. — Sept.

Thallus usque pedalis et ultra, lubricus colorisque rosei plerumque in pallescentem l. virescentem plus minusve vergentis, 2plicato- l. 3plicato-pinnatus, primarius usque 2 lineas diametro aequans, saepe membranaceo-inflatus. Rami ramulique

saepe e constrictionibus oppositi l. verticillati egredientes, basi attenuati; interstitia diametrum longitudine 3plo plerumque superantia, at nonnunquam aequantia. Sporocarpia, secundum auctores poro denique pertusa, semper mihi visa sunt clausa.

Huic speciei proxima *Chylocladia parvula Grev.*, Harv. Man. p. 72, differt: thallo breviori dichotomo, interstitiis diametrum longitudine aequantibus sporocarpiisque ovatis. Apud nos nondum inventa, ad litora Norvegiae meridionalia forsan crescit. Idem de *Lomentaria articulata* Huds. Lyngb. Hydr. p. 101. t. 30 valet, quae, cum ad litora Färöensia adsit, vix ad occidentalia Norvegiae desiderari potest.

## XII. CHYLOCLADIA *Grev.*

Thallus filiformis, tubulosus, continuus, ramosus. Sporocarpia subovata, Sporas denique in glomerulum compactas includentia. Peritetragonidia in ramulis sparsa, tetragonidiis triangulatim secedentibus.

### 1. Chylocladia clavellosa *Turn.*

Thallo subdistiche ramoso, ramis pinnatis, pinnulis oppositis basi attenuatis, excipulo ore producto.

*α.* thallo tenuiori, pinnis suboppositis saepe fere capillaribus.

Fucus clavellosus *Turn. Linn. Trans. v. 4. p. 133. t. 9.* (Ag.)
Gastridium clavellosum *Lyngb. Hydr. p. 70. t. 17. C.*
Chylocladia clavellosa *Hook. Engl. Fl. v. 2. — Alg. Scand. exs. n. 55.*

*β.* thallo quoad omnes partes obesiori, pinnis lineari-lanceolatis.

Gastridium purpurascens *Lyngb. Hydr. p. 69. t. 17. B.*
Chondria clavellosa *γ* Lyngbyei *Ag. Sp. 1. p. 354.*

In fundo petroso cum extra- tum intrataeniensi 4—10 orgyas alto praesertim conchifero; α per totam oram Sveciae occidentalem, a Kullaberg Scaniae (J. Ag. Vet. Ak. Handl. 1833) usque in Norvegiam saltim meridionalem; β prope Koster Bahusiae et per totam oram Norvegicam usque ad Christiansund. Jun. — Aug.

Color utriusque varietatis roseus; in α. thallus usque 6-pollicaris, primarius lineam crassitie rarius excedens, ramis pinnulisque interdum capillaribus; in β. vero, quae in mari Bahusiensi vix duas uncias est longus, ad oram vero Norvegicam non raro 6—8-pollicaris, thallus primarius usque 2 lineas interdum crassus pinnulaeque ut supra. Utraque, quamquam nullam bene constantem differentiam invenio, habitu valde differt.

4. *Thallus* calcarens fragilis. Sporae e fundo excipuli pyriformes. Tetragonidia nulla.

## XIII. CORALLINA *Linn.*

Thallus filiformis, calcareus, maxime fragilis, articulatus, ramosus. Sporocarpia terminalia, pyriformia, sporas e fundo excipuli clavato-elongatas includentia.

Cel. Decaisne (Annal. des Sc. nat.) ascos Sporas quattuor transversaliter secedentes continere affert; equidem, quoad observare potui, illos unisporos esse cum Kützingio crederem potissimum.

1. Corallina officinalis *Linn.*

Thallo ramoso, ramis subbipinnatis, pinnis pinnulisque

basi attenuatis, articulis pinniferis superne subovatis ceterisque cylindraceis diametro 2-plo longioribus, sporocarpiis nudis.

Corallina officinalis *Linn. Syst. ed.* 10. — *Fauna Sv. p.* 539. — *Sol. et Ell. p.* 118. *t.* 23. *f.* 14 *et* 15.

In rupibus lapidibusque cum in inferiori aquae limite tum in fundo pluriorgyali, extra- l. intrataeniensi, a Freto baltico saltim usque ad Christiansund Norvegiae. Anno toto.

Thallus caespitosus, nunc albescens nunc carneus, 3—4-pollicaris. Rami plerumque oppositi, abortu alterni, ultimi plus minus regulariter pinnati; pinnae oppositae basi attenuatae, apicem versus aequales, nec, ut in *C. cupressina* Lam., subulatim attenuatae. Articuli nudi, i. e. non-pinniferi, cylindracei, diametro 2-plo plerumque longiores; pinniferi superne dilatati, ut forma sint fere obovati.

### 2. Corallina rubens *Linn.*

Thallo dichotomo, ramis subdivaricatis, articulis cylindraceis diametro 4-plo longioribus, sporocarpiis 2—3-corniculatis.

Corallina rubens *Linn. Fauna Sv. p.* 540. — *Ell. Cor. t.* 24. *n.* 5. *f. e. E.* — *Lamour Hist. Pol. flex. t.* 9. *f.* 6. *t.*

In rupibus, lapidibus etc, in fundo plurium orgyarum extrataeniensi per totam oram Scandinaviae occidentalem saltim usque ad Molde, haud rara. Anno toto.

Thallus caespitosus, albescens l. omnino ruber, usque 2-pollicaris. Articuli non-ramiferi cylindracei, ramiferi vero, ut in priori, superne compressi. Sporocarpia obovata l. pyriformia, plerumque bi- rarius tricorniculata, corniculis simplicibus attenuatis, pluribus articulis pro more constitutis.

## XIV. MELOBESIA *Lamour.*

Thallus crustaceus, calcareus, plus minus adnatus, suborbicularis, sinuatus. Sporocarpia sparsa, verrucaeformia, Sporas e fundo excipuli clavato-elongatas includentia.

### 1. Melobesia membranacea *Lamour.*

Thallo pallide roseo minimo toto adnato, excipulis approximatis verruculoso.

Melobesia membranacea *Lamour. Hist. Polyp. flex. p.* 315. — *Decaisne Annal. d. Sc. nat.* 1842. *t.* 18. *p.* 126. — *Kütz. Phyc. gen. p.* 385. *t.* 78. *I.*

In foliis *Zosterae marinae* nec non *Halymeniae palmatae* ad litora occidentalia Scandinaviae, saltim a Bahusia usque ad Molde Norvegiae. Aestate a me lecta.

Duae a me lectae sunt formae; alteri, in *Zostera* crescenti, thallus diametro $\frac{1}{4}$ - $\frac{1}{3}$ lineam aequans, subroseus, orbicularis et eximie fructificans semper; alteri vero thallus diametro lineam et ultra aequans pallide roseus, dein cinereo-albescens, rariusque fructificans.

Fam. IV. Sphaerococceae. *Char. ess.* Sporocarpia glomerulo Sporarum intra excipulum cellulosum apiceque clausum recepto constituta, in thallo externa l. prominentia, ovata, globosa l. haemisphaerica.

Thallus, structurae in genere, ut in praecedenti familia, filiformis, frondosus l. membranaceus, interdum in partes cauliatque foliiformes discretus. Sporocarpia plerumque exserta,

rarius paululum immersa, apice clausa. Sporae in singulis filorum cellularium denique evanescentium cellulis singulae formatae, maturae in globulum plus minus densum congestae. Peritetragonidia nunc in thallo sparsa, nunc in receptaculis propriis (prolificationibus l. ramulis thalli plus minus mutatis) nidulantia.

## XV. DELESSERIA *Lamour.*

Thallus foliaceus, membranaceus, divisus, divisionibus saepe foliiformibus, costatus. Sporocarpia exserta l. semi immersa. Peritetragonidia in soros per thallum sparsos collecta l. in prolificationibus foliaceis recepta, tetragonidiis triangulatim secedentibus.

### 1. Delesseria sangvinea *Linn.*

Thallo inferne caulescente ramoso, superne in partitiones foliiformes petiolatas oblongas l. ovatas integerrimas opposite venosas discreto, sporocarpiis podicellatis prolificationibusque peritetragonidiiferis costae denudatae insidentibus.

Fucus sangvineus *Linn. Mant. p.* 136. — *Wahlenb. Lapp. p.* 491.
Delesseria sangvinea *Lam. ess. p.* 36. — *Ag. Syn. p.* 21. — *Lyngb. Hydr. p.* 7. *t.* 2. *A.* — *Alg. Scand. exs. n.* 57.

Rupibus, lapidibus l. Phyceis majoribus increscens, in fundo 3—18-orgyali extrataeniensi, a Freto baltico per totam oram Scandinaviae occidentalem usque in litora Nordlandiae, ubi denuo rarescere incipit sec. *Wahlenb.* l. c. Mense Martii in mari Bahusiensi optime fructificat.

Partitiones foliiformes coccineae et verorum foliorum speciem inter omnes Phyceas Scandinavicas optime gerentes, 8 uncias longae unamque latae, instante hyeme destruuntur, remanente sola costa, in qua mensibus Februarii atque Martii apparent Sporocarpia pro more oblique apiculata, l. prolificationes foliiformes nudae l. tetragonidiiferae, quae, ejectis tetragonidiis, in solitas partitiones thalli foliiformes excrescunt.

2. Delesseria sinuosa *Good. et Woodw.*

Thallo in partitiones foliiformes oblongas l. ovales margine crenatas — pinnatifidas l. prolificantes opposite venosas discreto, sporocarpiis sorisque peritetragonidiorum prolificationes e costa l. margine occupantibus.

Fucus sinuosus *Good. et Woodw. Linn. Trans. v. 3. p. 111. (Grev.) — Wahlenb. Lapp. p. 491.*
Delesseria sinuosa *Lam. ess. — Ag. Syn. p. 22. — Lyngb. Hydr. p. 7. t. 2. B. — Alg. Scand. exs. n. 26.*

Cum priori, Phyceis variis plerumque insidens, a Freto baltico per totam oram Scandinaviae occidentalem usque in litora Nordlandiae Finmarkiaeque. Martii atque Aprilis mensibus fructificans.

Partitiones foliiformes usque 6—8 uncias longae tresque latae, quoad formam maxime variantes, nunc undulatae, nunc lobatae, nunc pinnatifidae, at margine semper non integrae; quae cum, ut in priori, hieme non destruantur, mensibus allatis, in prolificationibus modo marginalibus modo costalibus explicantur Sporocarpia atque sori Peritetragonidiorum. Saepe prolificatio, inqua Sporocarpium adest, speciem suam foliiformem omnino perdit, quo existit Sporocarpium podicellatum, Sporocarpio *Delesseriae sanguineae* interdum omnino simile. *Delesseria sinuosa* itaque, secundum eas, quas dedit *Kützing*, generum Phycodris atque Delesseriae notas, ad utrumque pertinet.

### 3. Delesseria ruscifolia *Turn.*

Thallo inferne alato, superne in partitiones foliiformes e costa prolificantes subsessiles lineari-oblongas obtusas subperspicue venosas integras discreto, sporocarpiis in costa subsphaericis sorisque peritetragonidiorum eidem parallelis.

Fucus ruscifolius *Turn. in Linn. Trans. v.* 6. *p.* 127. *t.* 8. *f.* 1. *(Grev.)*
Delesseria ruscifolia *Ag. Spec. v.* 1. *p.* 175.

In Phyceis parasitica in fundo 6—12-orgyali petroso extrataeniensi, cum ceteris hujus generis speciebus, sed rarissime, v. c. in mari Bahusiensi extra Fiskebäckskil prope Långö et Brandskären, prope Koster etc. Jul. — Sept. fert fructum.

Thallus 1—2-pollicaris, inferne subcaulescens l. alatus. Partitiones foliiformes 3—4 lineas longae et 1½ lineam circiter latae. *Delesseria Hypoglossum*, ad oras nostras nondum inventa, differt partitionibus foliiformibus magis elongatis acutis, et absentia venarum, quae in nostra specie nudo oculo conspici possunt. Illa in mari norvegico quaerenda est.

### 4. Delesseria alata *Huds.*

Thallo inferne subcaulescente, superne lineari subpinnatim multifido subvenoso integro, sporocarpiis sorisque peritetragonidiorum prolificationes e costa l. margine, his et apices thalli, occupantibus.

Fucus alatus *Huds. Fl. Angl. p.* 578. *(Ag.)* — *Wahlenb. Fl. Lapp. p.* 492.
Delesseria alata *Lamour. ess.* — *Ag. Syn. p.* 12. — *Lyngb. Hydr. p.* 8. *t.* 2. *C.*

In rupibus l. stipite *Laminariae digitatae* cum paululum infra inferiorem aquae limitem, tum in fundo petroso plurior-

gyali plus minus extrataeniensi, a Freto bāltico per totam oram Scandinaviae occidentalem usque in ultimos fines Finmarkiae. Mensibus Martii atque Aprilis in mari Bahusiensi fructificans.

Thallus usque 4-pollicaris, segmentis latissimis linea vix latioribus. Ut in ceteris ita et in hac specie Sporocarpia atque peritetragonidia quoad locum, quem in thallo occupant, variant, illa, formae sphaericae, nunc thallo ipsi nunc ejus prolificationibus, modo e margine modo e costa emergentibus, immersa; cum hae prolificationes minimae sunt, fit, veluti in Delesseria sinuosa, ut figura earum foliacea obliteretur, quo existit Sporocarpium sphaericum podicellatum liberum, nunc margini thalli, nunc costae insidens. Peritetragonidia apicibus thalli non rarius immersa.

## XVI. AGLAOPHYLLUM *Grev.*

Thallus tenuissime membranaceus, structura reticulatus, ecostatus. Sporocarpia haemisphaerica, semiimmersa. Peritetragonidia in soros per thallum sparsos collecta, tetragonidiis triangulatim secedentibus.

### 1. Aglaophyllum punctatum *Stackh.*

Thallo breviter stipitato avenio plus minus dichotomo l. in segmenta diviso, segmentis margine integris l. lacinulatis sporocarpiis sorisque peritetragonidiorum oblongis per thallum sparsis.

Ulva punctata *Stackh. in Linn. Trans. v.* 3. *p.* 236. *(Grev.)*
Delesseria punctata *Ag. Sp. v.* 1. *p.* 186.
Wormskjoldia punctata *Spreng. Syst. Veg. — Aresch. Symbol.*
Nitophyllum punctatum *Grev. Alg. Br. p.* 79. *t.* 12.

β. *ocellatum:* thallo repetite dichotomo lineari margine integro. Nitophyllum ocellatum *Grev. Alg. Brit. p.* 78.

*Polysiphoniis* Conchisque insidens, in fundo petroso conchifero fere extrataeniensi 6—8 orgyarum, ostii portus prope Christiansund Norvegiae nec non ad insulas Grib, non infrequenter; β. ad Solsvig extra Bergen legit mihique communicavit *Koren.* Jun. — Jul. lectum.

Thallus roseus, in mari Norvegico interdum 18 pollices longus tresque latus, forma maxime variabilis, modo simplex oblongus margineque subinteger, modo in medium l. in basin in 3—4 lacinias latissimas divisus, quae l. margine integrae l. ibidem lacinulatae, lacinulis scilicet sublinearibus apiceque bifidis. — In forma β, cujus unicum solum possideo specimen, thallus ubique ejusdem latitudinis, lineam circiter latus duasque circiter pollices altus; auctoritatae Honoratissimae *Griffiths* varietatem habeo, quamquam apud nos nullas vidi formas intermedias. *Nitophyllum Bonnemaisonii* Grev. l. c. p. 81. thallo basi venis paucis obscuris notato diversum, ut ad insulas Orcadum lectum, in mari Norvegico sine dubio crescit.

### 2. Aglaophyllum laceratum *Gmel.*

Thallo venoso lineari dichotomo-fisso, laciniis apice rotundato-emarginatis, sporocarpiis sparsis, peritetragonidiis in soros l. marginales l. in prolificationibus marginalibus receptos collectis.

Fucus laceratus *Gmel. Hist. Fuc. p.* 179. *t.* 21. *f.* 4.
Chondrus laceratus *Lyngb. Hydr. p.* 18.
Delesseria lacerata *Ag. Sp. v.* 1. *p.* 184.
Nitophyllum laceratum *Grev. Alg. Brit. p.* 83.

In mari Norvegico; auctoritate Gunneri in Lyngbyei Hydrophytologia Dan. receptum.

Pro more plantam e Scandinavia non visam vix recipissem, nisi eandem ad oras nostras, praesertim Norvegicas, inveniri mihi esset persuasum. Auctoritatem Gunneri nil omnino facio, at, ni nimis fallor, primis mei phycologici studii annis inveni in mari Bahusiensi hujus plantae fragmentum, quod dein mihi casu quodam est perditum.

## XVII. PLOCAMIUM *Lyngb.*

Thallus lineari-filiformis, compressus l. subplanus, ecostatus, ramis distichis. Sporocarpia sessilia. Peritetragonidia in pinnulis seriata, tetragonidiis zonatim secedentibus.

### 1. Plocamium coccineum *Huds.*

Fucus coccineus *Huds. Fl. Angl. p.* 586 *(Ag.)*
Delesseria coccinea *Ag. — Sp. v.* 1. *p.* 180 *(D. Plocamium).*
Plocamium coccineum *Lyngb. Hydr. p.* 39. *t.* 9. *B.*

Phyceis insidens in fundo petroso 6—10 orgyas alto extrataeniensi, a Winga Bahusiae per totam Sveciae Norvegiaeque oram occidentalem saltim usque ad Christiansund, haud raro. Jul. — Sept.

Thallus longitudine 3—5-pollicaris et, ubi latissimus, dimiduam lineam circiter aequans.

## XVIII. RHODOMENIA *Grev.*

Thallus foliaceus, cartilagineus l. membranaceus, laciniatus, dichotomus l. pinnatus, ecostatus. Sporocarpia subglobosa l. haemisphaerica. Peritetragonidia per thallum sparsa l. in quadam ejusdem parte collecta, tetragonidiis triangulatim secedentibus.

### 1. Rhodomenia mamillosa *Good. et Woodw.*

Thallo attenuato-stipitato cartilagineo rigido superne lineari dichotomo, laciniis oblongo-cuneatis, sporocarpiis subglobosis pedicellatis per lacinias sparsis, peritetragonidiis - - -.

Fucus mamillosus *Good. et Woodw. in Linn. Trans.* 3. *p.* 174 *(Grev.)* — *Wahlenb. Fl. Lapp. p.* 496.
Sphaerococcus mamillosus *Ag. Syn. p.* 25. — *Lyngb. Hydr. p.* 18. *t.* 5. *C.*

Ad scopulos exteriores, supra infimum refluxus limitem, a Lindesnäs Norvegiae meridionalis per totam oram occidentalem regni usque in promontorium Nordkap, frequentissime. In Bahusiensi mari a me vix inventa. — Aestate fructificans.

"Quamquam" (Chondro crispo) "tenuior est, tamen ita rigidiusculus, ut per se stare queat dum refluit aqua, et pulvillos perpulchros in scopulis format", optime *Wahlenb.* l. c. — Thallus plerumque 3—4-pollicaris, normaliter intense purpureus, at colore, ut *Chondrus crispus*, varians. — Thallo atque fructificatione sequenti speciei propior videtur quam ulli alii, quare in hoc genere, ubi a tirone sine dubitatione quaeritur, reservare potius quam novum condere volui, quamquam veram esse Rhodomeniae speciem dicere nolo.

### 2. Rhodomenia ciliata *Huds.*

Thallo filiformiter stipitato membranaceo-cartilagineo primario superne lineari l. lanceolato plus minus pinnato, pinnis lanceolatis l. linearibus, toto l. margine ciliifero, sporocarpiis in ciliis, peritetragonidiis in maculas per thallum sparsas collectis. Tab. III. D.

Fucus ciliatus *Huds. Fl. Angl. p.* 580 *(Ag.)* — *Linn. Mant. p.* 136 et *p.* 519. — *Gunn. Fl. Norveg. v.* 2, *p.* 96.

Sphaerococcus ciliatus *Ag. Syn. p.* 28. — *Lyngb. Hydr. p.* 12. *t.* 4. *B. C.*

In mari Norvegico legit primus *Gunnerus;* specimina extra Bergen ad Solsvig lecta communicavit Am. *Koren;* quae in mari Bahusiensi ipse legi determinari vix possunt.

Specimina norvegica, quorum dua in tab. citata delineavi, 1—3 pollices longa, thallo inferne filiformi, superne plano, in lacinias 2—3 fisso; laciniae subcuneatae, apice saepe truncatae l. lineares, utrinque attenuatae, 1—2 lineas latae, margineque tantum ciliiferae. Huc pertinet *Sphaerococcus ciliatus β fuscus Lyngb. pag. c. tab. c. C.* — At varietates distinguere in polymorpha hac specie plane est irritus labor atque frustraneus.

### 3. Rhodomenia laciniata *Huds.*

Thallo vix l. subattenuato-stipitato cartilagineo-membranaceo palmato-dichotomo, sporocarpiis in processubus marginalibus, peritetragonidiis secus marginem sparsis.

Fucus laciniatus *Huds. Fl. Angl. p.* 579 *(Ag.)*
Ulva delicatula *Gunn. Fl. Norv. v.* 2. *t.* 8.
Sphaerococcus laciniatus *Lyngb. Hydr. p.* 12. *t.* 4. *A.*
Rhodomenia laciniata *Grev. Alg. Brit. p.* 86.

Phyceis innascens in fundo 6—8-orgyali petroso extrataeniensi, a Bahusia septentrionali, v. c. extra Koster in Grisbådnarne, per totam oram Norvegicam, extra Bergen ad Solsvig (Koren), saltim usque ad Christiansund (Ipse). Jul. — Aug. fructificans.

Stipes saepe vix ullus, sed thallus pulcherrime coccineus, mox planus, 3—8-pollicaris, usque ad basin palmato-dichotomus, segmentis semiunciam saepe latis, eodem modo ulterius partitis apicibusque nunc linearibus nunc integris nunc subcuneatis, bi-tri-fidis etc., margineque saepe proliferus. — *Ulva de-*

*licatula* Gunn., ab auctoribus ad Rhodom. palmatam relata, ad Rh. laciniatam certo certius pertinet.

### 4. Rhodomenia palmata *Linn.*

Thallo brevissime stipitato subcoriacco-membranaceo oblongo l. plus minus diviso e margine prolificationes oblongas l. cuneatas integras l. emarginatas bi-trifidas palmatasque gerente, sporocarpiis ....., peritetragonidiis in soros per thallum sparsos collectis.

Fucus palmatus *Linn. Sp. ed.* 1. *v.* 2. *p.* 1162. — *Wahlenb. Lapp. p.* 497.
Halymenia palmata *Ag. Syn. p.* 55. — *Spec. v.* 1. *p.* 105.
Ulva palmata *Lyngb. Hydr. p.* 25.
Rhodomenia palmata *Grev. Alg. Brit. p.* 95.

*β.* thallo basi attenuato sursum palmatim multipartito, segmentis linearibus laciniisque superioribus angustissimis.

Ulva palmata *β.* et *γ.* *Lyngb. Hydr. p.* 25.
Ulva sobolifera *Lyngb. l. c. p.* 27.
Halymenia palmata *β. γ. ε. Ag. Sp. v.* 1. *p.* 105—106.

Phyceis innascens in fundo 1—6-orgyali petroso extrataeniensi, saltim a Hallandia meridionali, ad oram Sveciae occidentalem usque in Koster; ad oram Norvegicam, praesertim in stipite *Laminariae digitatae*, cum locis mari aperto magis expositis, tum in sinubus magis seclusis, usque in Finmarkiam copiose; *β.* prope Trondhiem legit Sommerfeldt, in cujus herbario vidi. Anno toto.

Planta apud nos hujus generis maxima, coloris purpurei, pedalis, immo bipedalis; prolificationes 3—6 pollices longae, unum l. duos saepe latae, interdum bifidae l. palmatae. — Inter *α.* et *β.* nulli plane, secundum auctores, limites, licet,

cum formas utriusque maxime explicatas consideras, distinctas facile haberes. — Sporocarpia omnibus ignota.

5. Rhodomenia cristata *Linn.*

Thallo submembranaceo circumscriptione suborbiculari-reniformi a basi palmato-dichotomo, segmentis linearibus pinnato-palmatis incisisque, sporocarpiis marginalibus, peritetragonidiis in apicibus.

Fucus cristatus *Herb. Linn.*
Fucus coccineus β pusillus *Wahlenb. Fl. Lapp. p.* 500.
Sphaerococcus cristatus *Ag. Syn. p.* 29. — *Lyngb. Hydr. p.* 13. *t.* 4. *D.*
Rhodomenia cristata *Grev. Alg. Brit. p.* 89.

In Phyceis tenuioribus parasitica, in fundo petroso 6—10-orgyali extratacniensi, a Bahusia meridionali v. c. extra Winga, secus totam oram Scandinaviae occidentalem v. c. extra Christineberg, Grafvarne, Koster etc. Bahusiae; in mari Norvegico, v. c. ad Flekkefjord (Blytt), Molde atque Christiansund (Ipse), usque in Nordlandiam secundum *Wahlenb.* l. c. — Jun. — Sept. a me lecta.

Thallus ambitu suborbicularis l. reniformis, coloris sanguinei, unciam diametro aequans; segmenta ¼ l. ½ lineam lata. Peritetragonidia, quantum equidem observavi, semper in apicibus thalli, qua nota et forma thalli, nec non segmentorum angustia, a ceteris speciebus facile dignoscitur.

6. Rhodomenia bifida *Good.*

Thallo membranacco dichotomo l. palmato-fisso, apicibus subbifidis, sporocarpiis marginalibus, peritetragonidiis per thallum sparsis. — Tab. III. C.

Fucus bifidus *Good. et Woodw. in Linn. Trans. v.* 3. *p.* 159. *t.* 17. *f.* 1. (Grev.)

Sphaerococcus bifidus *Ag. Sp. v.* 1. *p.* 229.
Rhodomenia bifida *Grev. Alg. Brit. p.* 85.

Phyceis tenuioribus increscens, in fundo 6—10-orgyali petroso extrataeniensi maris Bahusiensis passim, v. c. extra Christineberg ad Långö, prope Koster etc. Jul. — Aug. lecta.

Thallus apud nos longitudine vix plus quam pollicaris; segmenta subcuneata, 1—2 lineas lata, apicibus bifidis, emarginatis l. omnino integris. Quoad thalli formam specimina hujus sterilia a sterilibus sequentis vix descriptione dignosci possunt; tenuitate tamen atque colore semper roseo a perito utraque in natura non difficile dignoscitur. — Specimina ceterum anglica nec non gallica svecicis longe majora, laciniis nunc linearibus nunc late cuneatis, mox margine integris, mox laceris etc. Fructus atque tetragonidia in speciminibus Bahusiensibus non raro adsunt.

### 7. Rhodomenia palmetta *Esp.*

Thallo filiformiter stipitato membranaceo subcuneiformi dichotomo l. palmato-fisso, segmentis linearibus, sporocarpiis secus marginem l. in disco, peritetragonidiis in apicibus in zonam transversalem collectis. Tab. III. B.

Fucus Palmetta *Esp. Ic. Fuc. t.* 40. *(Ag.)*
Sphaerococcus Palmetta *Ag. Spec. v.* 1. *p.* 245.
Rhodomenia Palmetta *Grev. Alg. Brit. p.* 88.

In stipite *Laminariae digitatae* in fundo 6—8-orgyali extrataeniensi, v. c. in mari Bahusiensi extra Winga, Christineberg, Koster etc. rarissima. Jun. — Sept.

Planta maxime polymorpha, apud nos propter raritatem minus multiformis. Forma Bahusiensis: thallus ruber l. rubro-roseus, 1—2-pollicaris, dichotomus, segmentis primariis 2—3

lineas latis; laciniae lineares, apice integrae l. bifidae. Vel thallus reniformis, 2—4-fidus, laciniis latis apiceque subtruncatis, vel eximie cuneatus apiceque tantum emarginatus l. bifidus, laciniis linearibus obtusis. Alia forma, in maribus Scandinavicis nondum inventa, gaudet stipite subrepente ramoso thalloque palmato, segmentis elongatis lineam latis denuo in lacinias plures l. pauciores acutiusculas l. obtusas fissis. — In speciminibus meis Scandinavicis neque sporocarpia adsunt neque peritetragonidia. Species in nostris maribus parum evoluta.

## XIX. GIGARTINA *Lamour.*

Thallus filiformis, teres l. compressus, ramosus. Sporocarpia in l. secus ramos ramulosve. Peritetragonidia in ramulis sparsa, tetragonidiis triangulatim secedentibus.

Characterem datum non optimum esse, speciesque infra allatas ad diversa genera melius referri posse, perbene scio, cum vero fructus plurimarum specierum nondum sit inventus, auctoribus *Greville* atque *Harvey*, eas generi, quod notis thallinis nititur, ut facilius a tyrone inveniantur, eo potius subsumere concessum puto, quod in dissertatione, speciali Phyceарum Scandinaviae cognitioni dicata, universalem generum limitationem fusius tractare non licet.

### 1. Gigartina purpurascens *Huds.*

Thallo flaccido tereti ramosissimo, ramis ramulisque subsetaceis utrinque attenuatis sparsis, sporocarpiis sphaericis ramulis innatis.

Fucus purpurascens *Huds. Fl. Angl. p.* 589. *(Ag.)*

Gigartina purpurascens *Lamour. Lyngb. Hydr. p.* 46. *t.* 12. *B. C.*

Sphaerococcus purpurascens *Ag. Syn. p.* 31. — *Spec. v.* 1. *p.* 318.

Paululum infra limitem aquae infimum, rupibus Phyccisque innascens, l. in fundo petroso cum extra- tum intrataeniensi usque 10-orgyali, a Freto baltico per totam oram Scandinaviae occidentalem saltim usque ad Christiansund frequentissime. Toto anno; aestate fructificans.

Callus radicalis parvus "fibras emittens plurimas incurvas." Thallus coloris rubri l. plus minus diluti, usque pedalis et ultra, basi pennam corvinam crassus, undique ramis obsessus; rami iterum iterumque ramosi. Sporocarpia in ramulo saepe plura, quasi seriata. Specimina sterilia a sequentis ramis ramulisque densioribus minusque elongatis non difficile dignoscuntur.

### 2. Gigartina confervoides *Linn.*

Thallo flaccido tereti ramoso, ramis ramulisque elongatis utrinque attenuatis sparsis, sporocarpiis subsphaericis lateralibus.

Fucus confervoides *Linn. Spec. ed.* 1. *v.* 2. *p.* 1629.
Gigartina confervoides *Lamour.* — *Lyngb. Hydr. p.* 45.
Sphaerococcus confervoides *Ag. Syn. p.* 55. — *Spec. v.* 1. *p.* 303.

In fundo ostreifero prope Christineberg atque Koster Bahusiae, parce. Jul. — Aug.

Omnia, quae legi, specimina, numero pauca, sterilia sunt, quamobrem plantam Scandinavicam minus cognitam habere cogor.

### 3? Gigartina plicata *Huds.*

Thallo rigido tereti irregulariter ramosissimo, ramis ramulisque subsecundis implexis aequalibus apice furcatis, sporocarpiis. . .

Fucus plicatus *Huds. Fl. Angl. p.* 589. *(Ag.)*
Gigartina plicata *Lamour. Lyngb. Hydr. p.* 42. *t.* 66. *A.* 1.
— *Alg. Scand. exs. n.* 4.
Gigartina Griffithsiae *Lyngb. Hydr. p.* 43. *t.* 11. *C.*
Sphaerococcus plicatus *Ag. Syn. p.* 42. — *Spec. v.* 1. *p.* 315.
Ahnfeltia plicata *Fr. Fl. Scan. p.* 310.

In scopulis ulnam l. orgyam sub aqua demersis, a Freto baltico per oram totam Scandinaviae occidentalem saltim usque ad Bergen (Koren) frequenter. Anno toto.

Thallus longitudine 3—6-pollicaris, coloris nunc purpurei l. violacei, nunc rosei l. flavescentis, seta porcina duplo circiter crassior et omnium Scandinaviae Floridearum facile rigidissimus; rami ramulique nunc secunde subfasciculatim exeuntes, nunc magis sparsi, vario modo implicati. Ne minimum in hac planta a me observatum est fructificationis vestigium, nec, ut credo, ab alio quodam auctore. "Nemathecia elliptica, frondem amplectentia, tota e filis articulatis constituta", commemorant quidem auctores; quae vero in speciminibus exoticis ita apellata examinavi, ea vix alia quam ramulorum primordia.

## XX. PHYLLOPHORA *Grev.*

Thallus foliaceus, membranaceus, divisus, prolificans. Sporocarpia sessilia l. podicellata, Sporas minutas continentia. Nemathecia, i. e. verrucae e filis simplicibus cellularibus stipatis composita.

### 1. Phyllophora membranifolia *Good. et Woodw.*

Thallo caulescente filiformi tereti ramoso sursum in laci-

nias latas membranaceas truncatas lobatas l. dichotomas desinente, sporocarpiis subellipticis inferne ad ramos teretes podicellatis.

Fucus membranifolius *Good. et Woodw. in Linn. Trans. v.* 3. *p.* 120. *t.* 16. *f.* 1.
Sphaerococcus membranifolius *Ag. Syn. p.* 26. — *Lyngb. Hydr. p.* 10. *t.* 3.
Chondrus membranifolius *Grev. Alg. Brit.*
Phyllophora membranifolia *J. Ag. Alg. med. et adr. p.* 93.

* stipite simpliciusculo in laminam cuneiformem palmatam desinente.

Sphaerococcus membranifolius γ. latifolius *Ag. Spec. v.* 1. *p.* 242.

β. thallo caulescente ramosissimo sursum in lacinias elongatas angustissimas numerosissimas repetite diviso.

Fucus membranifolius γ. angustissimus *Turn. Hist. n.* 74.
Sphaerococcus membranifolius *var.* angustissimus *Ag. Syn. p.* 27.
Sphaerococcus Brodiaei angustissimus *Ag. Sp. v.* 1. *p.* 240.

* thallo toto filiformi vage ramoso.

Sphaerococcus membranifolius δ. fibrillosus *Ag. Syn. p.* 27. — *Spec. v.* 1. *p.* 242.

In fundo cum extra- tum intrataeniensi petroso l. lapidoso 1—10-orgyali; forma α. a Freto baltico per totam Sveciae Norvegiaeque oram occidentalem saltim usque ad Bergen (Koren); α.* in stipite Laminariae digitatae passim; β. in mari baltico ad oras Blekingiae v. c. prope Trollholmen extra Carlskrona (Aspegren) et β.* prope Torrums udde. Anno toto, hyeme fructificans?

In forma *α.* thallus 4—6-pollicaris, sursum plus minusve dichotomus l. multifidus, laciniis semiunciam usque latis colorisque laete purpurei. Sporocarpia in speciminibus anglicis, a Honoratissima *Griffiths* mihi communicatis, a me solum visa, infra lacinias thallo filiformi caulescenti inserta, ovata breviterque podicellata. Nemathecia in laciniis sparsa. — Var. *β.* valde singularis: Callus radicalis magnus, thallus 4—6-pollicaris, laciniis semilineam vix latis. — Multae hujus speciei formae vix nisi difficile a sequentis dignoscuntur.

### 2. Phyllophora brodiaei *Turn.*

Thallo inferne caulescente filiformi l. plano simplici l. ramoso superne in lacinias simplices l. divisas membranaceas apiceque prolificantes ibidemque sporocarpia gerentes desinente.

Fucus Brodiaei *Turn. Hist. Fuc. t.* 72.
Sphaerococcus Brodiaei *Ag. Syn. p.* 27. — *Lyngb. Hydr. p.* 11. *t.* 3. *B.*
Chondrus Brodiaei *Grev. Alg. Brit.*
Phyllophora Brodiaei *J. Ag. Alg. med. et adr. p.* 93.

*β. concatenata*: thallo inferne caulescente elongato ramosissimo, laciniis lanceolatis l. cuneatis subintegerrimis l. bifurcis e margine laciniis usque subsetaceis elongatis obsessis. Tab. III. A.

Sphaerococcus Brodiaei *β.* concatenatus *Lyngb. Hydr. p.* 11. — *Ag. Sp. v.* 1. *p.* 239.

In fundo cum extra- tum intrataeniensi petroso l. lapidoso, a mari baltico per totam oram Sveciae atque Norvegiae occidentalem saltim usque ad Bergen (Koren); *β* in fundo conchifero. Toto anno; autumno fructificans.

Callus radicalis plerumque magnus multicaulis. Thallus usque 4-pollicaris, ima saltim basi teres, dein planus, semili-

neam et ultra latus, nunc e apice tantum, nunc e marginibus unicam l. plures lacinias cuneatas apice emarginatas l. plus minus fissas emittens. Sporocarpia subsphaerica, inter prolificationes oblongas in laciniarum l. earum partitionum apicibus plus minus podicellata. Var. *β.* singularis: laciniae oblongae, utrinque acutae l. bifurcae, l. e apice l. e utraque furca emittunt "caulem" planum semilineam vix latum pollicemque longum, qui apice lacinia iterum coronatur, quae l. (si utrinque acuta est) denuo caulem l., si bifurca est, duos emittit caules, qui denique novis laciniis apice coronantur, et sic in ceteris.

### 3. Phyllophora rubens *Linn.*

Thallo vix caulescente mox lineari costato simplici l. dichotomo e margine prolifero, prolificationibus cuneato-ellipticis apice bifurcis l. integris, sporocarpiis sparsis, excipulo rugoso.

Fucus rubens *Linn. Sp. ed.* 1. *v.* 2. *p.* 1630.
Sphaerococcus rubens *Ag. Syn. p.* 22.
Chondrus rubens *Lyngb. Hydr. p.* 18.
Phyllophora rubens *Grev. Alg. Brit. p.* 135. *t. XV.*
* angustissima, thallo vix semilineam lato.

In fundo cum extra- tum intrataeniensi petroso l. conchifero, a Freto baltico per totam oram Scandinaviae occidentalem saltim usque ad Bergen Norvegiae (Koren). Anno toto.

Ab ceteris differt facile, fructum ut omittam, thallo coloris subrosei substantiaeque magis membranaceae, prolificando quasi concatenato, lineari, 2 lineas plerumque lato etc. Sporocarpia in speciminibus Scandinavicis vidi nunquam, neque quae ita nominantur, an vera sint, dicere possum.

Fam. V. Cryptocarpeae. *Char. ess.* Sporocarpia, glomerulo Sporarum, intra excipulum spurium cellulis am-

bientibus thalli formatum, recepto constituta, intra stratum corticale interna.

Thallus nunc strato medullari, cellulis elongatis formato, filisque cellularibus illi verticaliter impositis inter se plus minus liberis stratumque corticale constituentibus constructus, nunc tribus stratis corticali, intermedio atque centrali conflatus, filiformis, compressus l. foliaceus. Glomeruli sporarum in iis, quorum strati corticalis fila inter se sunt minus compacta, omni excipulo spurio carentes; in aliis contra, quarum strati corticalis fila inter se dense sunt compacta atque concreta, cellulae, quae glomerulum ambiunt, in excipulum spurium, cum excipulo Ceramiorum vix confundendum, circa illum confluunt. — Tetragonidia intra stratum corticale.

Ut optime exposuit J. Agardh (Alg. med. et adr.) *Helminthora* sine omni dubitatione affinis est Ceramieis; immo *Crouania* a *Kützing* cum *Callithammio* conjungitur. Inter *Helminthoram*, *Dudresnajam* et cetera a me huc relata genera, v. c. Nemostoma, mihi saltim impossibile est tam firmos trahere limites, ut illa genera ad aliam quam hoc referre potuerim familiam; major minorve firmitas, qua inter se compacta sunt fila strati corticalis, parum ad familias condendas mihi sufficere videtur.

## XXI. CHONDRUS *Lamour.*

Thallus superne planus dichotomus, strato interiori atque corticali compacto constructus. Sporocarpia: glomeruli Sporarum in strato interiori nidulantes, in apicibus thalli extus protuberantes. Tetragonidia ignota.

1. Chondrus crispus *Linn.*

Fucus crispus *Linn. Mant. p.* 134. — *Wahlenb. Fl. Lapp. p.* 497.
Chondrus polymorphus *Lamour.*
Sphaerococcus crispus *Ag. Syn. p.* 24.
Chondrus crispus *Lyngb. Hydr. p.* 15. *t.* 5. *A. et. B.* — *Kütz. Phyc. gen. p.* 398. *t.* 73. *III.*

Ad scopulos unam l. alteram sub aquae superficie ulnam demersos, cum exteriores tum interiores, l. in fundo petroso pluriorgyali, a Freto baltico per totam oram Scandinaviae occidentalem usque in fines Finmarkiae. Toto anno; Aug. — Sept. fructificans.

Color praesertimque forma valde variabilis, ut sit sane planta polymorpha potius quam crispa. Ille mox purpureus l. ruber, mox violaceus et iridescens, immo viridis. Thallus plerumque 3—6-pollicaris, laciniis nunc dilatatis (tamen formae illae maxime dilatatae Galliae atque Angliae minime in Bahusia et vix in Norvegia adsunt), nunc, quod in Bahusia saepissime, 1—2 lineas latis regulariter dichotomis apiceque obtusis, nunc angustissimis acuminatis, immo nonnunquam totus thallus omnino fere filiformis, quae tamen forma apud nos rara.

## XXII. POLYIDES *Ag.*

Thallus filiformis, farctus, dichotomus, strato medullari, intermedio atque corticali compacto constructus. Sporocarpia: glomeruli Sporarum e sporophoro radiantium excipulo spurio recepti, in verrucis spongiosis purpureis ad ramos superiores adnexis nidulantes. Tetragonidia ignota.

Ut jam in Linnaea 1843 a me observatum et deinde figuris eximiis Phyc. gen. Kütz. contestatum est, hoc genus quoad structuram speciminum saltim sterilium, cum sequenti omnino congruit. Verrucae illae spongiosae, quamquam valde singulares videantur, sunt tantum strati corticalis excrescentiae, ut glomeruli vere intra stratum corticale, ut fert character familiae, nidulentur.

1. Polyides rotundus *Gmel.*

Fucus rotundus *Gmel. Hist. Fuc. p.* 110. *t.* 6. *f.* 3.
Chordaria rotunda *Ag. Syn. p.* 12.
Furcellaria rotunda *Lyngb. Hydr. p.* 49.
Polyides lumbricalis *Ag. Syst. p.* 192.

In fundo 4—8-orgyali cum extra- tum intrataeniensi petroso per totam oram Bahusiae, at non copiose. E Norvegia non vidi. Anno toto; Aug. — Sept. fructificans.

Callus radicalis discoideus, vix fibrosus. Thallus usque 8-pollicaris, coloris translucide purpurascentis, crassitie *Furcellariae*, a qua sterilis vix nisi colore calloque dignoscitur. Fructificationem bis modo legi prope Wargö extra Gothoburgum, tempore supra allato.

## XXIII. FURCELLARIA *Lamour.*

Thallus filiformis, farctus, dichotomus, strato medullari, intermedio atque corticali constructus. Sporocarpia: glomeruli Sporarum excipulo spurio recepti, in apicibus intumescentibus thalli intra stratum corticale in circuitu nidulantes. Peritetragonidia oblongo-elliptica, in intumescentibus apicibus intra stratum corticale in circuitu horizontalia, tetragonidiis zonatim secedentibus.

In Linnaea 1843 *Furcellariam* a *Polyide* generice non esse diversam perperam putavi, quam, fructu melius cognito, nunc revoco sententiam. Utrumque vere distinctum esse genus e characteribus datis unicuique, ut credo, facile patebit.

1. Furcellaria fastigiata *Huds.*

Fucus fastigiatus *Huds. Fl. Angl. p.* 588. *(Ag.)*
Furcellaria lumbricalis *Lam. ess.* — *Ag. Syn. p.* 10. — *Lyngb. Hydr. p.* 48. *t.* 4. *f. A. f.* 1—4.
Furcellaria fastigiata *Lam. ess.* — *Ag. Sp. p.* 103. — *Alg. Sc. ex. n.* 31.

In fundo petroso cum extra- tum intrataeniensi 1—15-orgyali; in mari orientali ad littora Gottlandiae, Blekingiae Scaniaeque; perque oram totam Scandinaviae occidentalem saltim usque ad Bergen (Koren). Anno toto; autumno tetragonidia proferens.

Callus radicalis fibrosus, repens. Thallus rufo-fuscescens, palmaris et ultra, pennam columbinam crassus, dichotomus, fastigiatus; apices ab auctoribus receptacula vulgo dicti, lineares, acuminati, triplici modo intumescunt, nempe: 1:mo quod cellulae elongatae atque seriatae strati intermedii in formam sphaericam intumescunt et inter se liberae evadunt, magnitudinis denique longe majoris; hae sunt, quas Agardh Sp. v. 1. p. 102 capsulas sphaericas nominavit; 2:do quod in his cellulis strati intermedii elongatis tetragonidia formantur (apices tetragonidiferi); 3:tio quod inter easdem cellulas sporarum glomeruli existunt (apices fructiferi). Aestate tota, ut equidem observavi, in his apicibus intumescentibus saltim apud nos inveniuntur tantum cellulae illae sphaericae, quae an gonidiorum sint naturae haud scio. Mense Octobris atque Novembris tetragonidia in iisdem explicantur; quibus explicatis, apices intumescentes dissolvuntur omnino, quo ejiciantur tetragonidia. — Sporocarpia in speciminibus anglicis solum vidi.

## XXIV. IRIDAEA.

Thallus foliaceus in stipitem brevem attenuatus, strato medullari atque corticali compacto constructus. Sporocarpia: glomeruli Sporarum excipulo spurio recepti, intra stratum corticale in thallo sparsi. Peritetragonidia intra stratum corticale, tetragonidiis zonatim secedentibus.

### 1. Iridaea edulis *Stackh.*

Thallo subplano basi subcuneato superne rotundato integerrimo l. in lacinias irregulariter fisso.

Fucus edulis *Stackh. Ner. Brit. t.* 12. *(Ag.)*
Ulva edulis *Dec. Fl. Fr. — Lyngb. Hydr. p.* 26.
Iridaea edulis *Bory Dict. Class. — Grev. Alg. Brit. p.* 158. *t.* 17.

*a.* thallo subcuneiformi apice rotundato.

*b.* thallo majori maxime dilatato apice lobato l. usque in basin in lacinias plus minus cuneatas scisso.

In scopulis 5—12 orgyas demersis extrataeniensibus, a Kullaberg Scaniae per totam oram Scandinaviae occidentalem saltim usque ad Bergen (Koren), fere ubique. Anno toto.

Thallus coloris sangvineo-purpurei, usque 2 pedes longus unumque l. plus latus. Specimina vero integra, seu forma *a.*, pedem rarius aequant; majora aut animalculis laesa, aut vi quasi externa scissa. Inter utramque ne minima quidem ceterum differentia. Forma *b.* quoad structuram atque formam externam, cum *Sarcophylli lobata Kütz.* Phyc. gen., cum descriptionem atque figuram conferimus, tam bene convenit, ut quin eadem sit planta vix dubitem; hocque eo magis, quod

specimina similia ex Anglia ipse accepi. Tam levis differentia anatomica, ac inter genus *Sarcophyllin* atque *Iridaeam* apud *Kützing*, in eodem saepe individuo occurrit. Conferas structuram thalli inferioris atque superioris, praesertim apicum intumescentium, *Furcellariae!* Paucis: *Sarcophyllis lobata* Kütz. est omnino *Iridaea edulis*, nam et formae a. vidi specimina ejusdem omnino structurae ac in figura Kützingiana.

## XXV. DUMONTIA *Lamour.*

Thallus filiformis, tubulosus, ramosus, strato medullari atque corticali compacto constructus. Sporocarpia: glomeruli Sporarum excipulo spurio recepti, ad parietem tubulositatis adnati. Peritetragonidia in pariete tubulositatis verticalia, tetragonidiis cruciatim secedentibus.

### 1. Dumontia filiformis *Huds.*

Thallo subpinnatim ramoso, ramis distantibus basi attenuatis elongatis simplicibus.

*a.* thallo fusco-rubro l. violaceo usque pedali, ramis crassioribus.

Ulva filiformis *Huds. Fl. Angl. p.* 570. — *Wahlenb. Fl. Lapp. p.* 506.
Conferva filiformis *Fl. Dan. t.* 1480. *f.* 2. *(Ag.)*
Gastridium filiforme *Lyngb. Hydr. p.* 68. *t.* 17. *A.*
Dumontia filiformis *Grev. Alg. Brit. p.* 165. *t.* 17.

*b.* thallo dilute rubro 2—3-pollicari, ramis tenuioribus.

*c.* thallo subroseo 2—3-pollicari, ramis valde elongatis.

Forma *a.* in inferiori limite aquae rupibus adnata, locis ab aperto mari magis seclusis l. in fundo petroso intrataenicusi 1—2-orgyali, a Kullaberg Scaniae per totam oram Scandinaviae occidentalem usque in littora Nordlandiae; in Bahusia initio Julii omnino evanescens; *b.* ad scopulos rupesque undis vehementioribus maris aperti expositos, per totam oram Bahusiensem frequens, usque ad initium Augusti persistens; *c.* in scrobiculis aqua marina repletis, v. c. prope Koster Bahusiae, usque in finem Augusti persistens.

Forma *a.* et *b.* eisdem locis, nisi memoria fallit, nunquam mihi obvia; attamen formae intermediae non rarae. Illa latitudine duas lineas saepe aequans, ramorum apicibus nunc dissolutione quasi truncatis l. obtusis, nunc integris tuncque attenuatis; *b.* vix unquam 4-pollicaris, lubricior, non raro flavescenti-purpurascens, ramis plerumque magis, quam in *a.*, approximatis, nunc apice attenuatis, nunc dissolutione obtusis. Sporocarpia in speciminibus Scandinavicis a me nunquam visa. — Tetragonidia, praesertim in forma *b.*, non rara, apicibus ramorum dissolutis, per tubulositatem eorum ejici videntur.

*Ulvam filiformem* Wahlenb. Fl. Lapp. ad *Dumontiam filiformem* et praecipue ad formam *a.* pertinere, omni dubitatione vacare crederem. *Ulva purpurascens* Engl. Bot., Ag. Sp. v. 1. p. 220, a *Greville* ad *D. filiformem* relata, cum nostra forma *b.*, quae et saepissime tetragonidifera est, propter colorem ejus apud *Agardh* memoratum nec non "semina sparsa", optime convenire mihi videtur. Jam itaque *Smith* in hac planta observavit tetragonidia.

2. Dumontia ramentacea *Linn.*

Thallo ramis undique egredientibus confertis simplicibus l. ramulosis obsesso.

Fucus ramentaceus *Linn. Syst. Nat. ed. 12. v. 2. p. 718. — Wahlenb. Fl. Lapp. p. 504.*

Scytosiphon ramentaceus *Lyngb. Hydr. p.* 61.
Dumontia? ramentacea *Grev. Alg. Brit. p. LXII.*

a. thallo ramis elongatis 2—3-pollicaribus ramulis simplicibus obsessis ornato.

b. filis e callo radicali pluribus apicem versus ramis brevissimis simplicibus obsessis.

Paululum supra infimum refluxus limitem (?) ad rupes secus oram Finmarkiae, ut videtur, minime rara, v. c. ad Altenfjord (Wahlenberg), Renoe (Blytt), Wadsö atque Wardö (Gunnerus).

Thallus ruber l. subviolaceus, usque palmaris et forsan ultra. Fila ex eodem callo radicali plerumque plura, basi attenuata, nunc simplicia omnino l. apice ramis brevissimis simplicibus obsessa; nunc in medio ramis utrinque attenuatis, crassioribus l. tenuioribus, usque 2-pollicaribus vestita; hi rami l. simplices, l. ramulis brevioribus, vix plus quam 2 lineas longis, praecipue versus apicem confertioribus, ornati. Fructus atque tetragonidia hujus plantae plane mihi latent, ramulorumque natura dubia videtur.

## XXVI. GLOIOSIPHONIA *Carm.*

Thallus filiformis, tubulosus, ramosus, strato interiori fibris cellularibus longitudinalibus tenuissimis, et corticali filis illi verticaliter impositis cellularibus inferne densissime conglutinatis superne (in apicibus thalli) in verticillos subdistantes collectis liberis dichotomis formato constructus. Sporocarpia: glomeruli Sporarum subglobosi, inter fila strati corticalis sparsa. Tetragonidia ignota.

An genus a sequente vere sit distinguendum, nondum mihi clarum; immo *Dudresnaja*, *Gloiosiphonia*, *Helminthora* etc. videntur mihi genera nimis affinia. *Gloiosiphonia* a sequente minus tubulositate thalli, quam in inferiori thalli parte filorum, quae stratum corticale formant, arcta conglutinatione, ita ut hic, et maxima saepe vi adhibita, inter se vix secedant. In hujus atque sequentis generis vicinia suum locum, si quid video, habere *Batrachospermum* oportet; suadet color, structura, atque fructificatio, quae plane eadem.

### 1. Gloiosiphonia capillaris *Huds.*

Tab. IV. C.

Fucus capillaris *Huds. Fl. Angl. p.* 591. (Turn.) *Turn. Hist. t.* 31. *et* 31.*
Gigartina lubrica *Lyngb. Hydr. p.* 45. *t.* 12. *A.*
Mesogloia capillaris *Ag. Syst. p.* 51.
Gloiosiphonia capillaris *Carm.* — *Berkel. Glean. of British. Algae t.* 17. *f.* 3. — *Alg. Scand. exs. n.* 65.

In scrobiculis rupium undis aperti maris superfusis paululumque sub inferiori aquae limite demersis, a Horsholmarna Hallandiae septentrionalis extra Särö, per totam Bahusiae oram, v. c. ad Kärringön, Långö extra Christineberg, Brannskären etc.; in mari Norvegico ad Oxefjord legit *Lyngbye* et prope Bergen Dr. *Koren.* Jul. — Aug.

Thallus plus minus dilute ruber l. roseus, usque 3-pollicaris, primarius lineam vix unquam crassus, subinflato-tubulosus, a basi fere ramosus; rami nunc sparsi nunc oppositi, lineam unam alteramve distantes, basi attenuati, ramulis plus minus crebris iterumque dichotomo-ramellosis; ramelli utrinque attenuati. — Planta Scandinavica cum anglica atque gallica, secundum ea, quae vidi specimina, plane congruit.

## XXVII. HELMINTHORA *Fr.*

Thallus filiformis, solidus, dichotomus, strato interiori fibris cellularibus longitudinalibus tenuissimis, et corticali filis illi verticaliter impositis cellularibus densis liberis ramosis formato constructus. Sporocarpia: glomeruli Sporarum globosi, inter fila strati corticalis sparsa. Tetragonidia ignota.

Genus primum, typo *Mesogloiae multifidae* Ag., a Cel. Fries in Syst. Orb. Veg. a *Mesogloia* bene separatum, dein, nomine illo neglecto, ab aliis sub *Nemalionis* genere distinctum. Hinc nomen prius datum reservare non dubito. In omnibus generibus affinibus, v. c. *Dudresnaja*, *Gloiosiphonia* etc., tum in hoc glomeruli sporarum nullo omnino excipulo unicellulari, ut in *Callithamnio*, inclusus, quod in *Dudresnaja* perperam delineavit Cel. *Decaisne*. (Annal. d. Sc. nat. 1842. Bot. vol. 16. t. 16. f. 8. a.)

### 1. Helminthora multifida *Web.* et *Mohr.*

Tab. IV. B.

Rivularia multifida *Web. et Mohr. Reise t. 3. f. a. b. c.*
Chaetophora rubra *Ag. Syn. p. 127.*
Chordaria multifida *Lyngb. Hydr. p. 51.*
Mesogloia rubra *Ag. Syst. p. 50. — Alg. Scand. exs. n. 21.*
Helminthora multifida *Fr. Syst. Orb. Veg. p. 341. — Fl. Scan. p. 311.*

Ad scopulos lapidesque undis maris fere aperti expositos, in superiori aquae limite, a Freto baltico per totam oram Hallandiae Bahusiaeque nec non Norvegiae saltim usque ad Molde. Jul. — Sept.

Thallus ruber, usque pedalis et ultra, 1—2 lineas crassus, valde lubricus, plerumque in plures dichotomias divisus; interdum tenuior, parce dichotomus, apicibus forcipatis. Inter hanc speciem atque *Helminthoram lubricam* seu *Nemalion lubricum* Auctor. nullam plane invenio differentiam specificam.

## XXVIII. HILDEBRANDTIA *Nardo.*

Thallus crustaceus, arctissime adnatus, cellulis isomorphis rotundatis arcte conglutinatis constructus. Sporocarpia: excipulum cellulis ambientibus thalli formatum poroque pertusum, ascos inter fila paraphysoidea sporis quattuor inaequalibus farctos excipiens.

Genus, dubiae affinitatis, hic melius forsan collocandum, *Cruoriae* atque *Melobesiae* sine dubitatione analogum. — Sporae, quas tetragonidia, quoniam in excipulo adsunt, nominare nequeo, neque cruciatim neque triangule, sed valde irregulariter, secedentes.

### 1. Hildebrandtia rosea *Kütz.*

Thallo coccineo-roseo arctissime adnato tenuissimo suborbiculari l. omnino forma indeterminato.

Hildebrandtia rosea *Kütz. Phyc. gen. p.* 384.
Erythroclathrus pellitus *Liebm. Kroyers Tidskrift.* 1839. (sec. specim. auctoris).
Cruoria pellita *Örsted de Reg. mar. p.* 50. (sec. specim. auctoris).

Hab. in rupibus lapidibusque littoris ab undis suffusis, paulum infra inferiorem aquae limitem, a Freto baltico per oram

Scandinaviae usque ad Christiansund ubique frequentissime. Jul. — Sept. fructificans (?).

Thallus ita arcte adnatus tamque tenuis, ut maculam roseam l. rubram in lapide tantum referat, nunc punctiformis nunc unciam et ultra diametro aequans, nunc indeterminatae omnino formae, per rupes lapidesque, veluti tincti essent, per longa spatia effusus; cellulae, quibus constructus est, arctissime inter se conglutinatae, neque in fila cellularia vi quadam segregantur unquam, ut in Cruoria pellita, quamobrem *Chaetophoram pellitam*, ut eandem descripsit atque depinxit *Lyngbye*, ad *Hildebrandtiam roseam* minime pertinere posse, luce clarius est.

Fam. VI. Ceramieae. *Char. ess.* Sporocarpia, glomerulo Sporarum nudo l. intra excipulum unica cellula constructum recepto constituta, in thallo externa.

Thallus nunc cellularum elongatarum serie solitaria constructus, ecorticatus omnino l. cellulis minoribus corticatus, nunc parenchymaticus, filiformis l. compressus, ramosus, pinnatus. Glomerulus sporarum in thallo externus, nunc nudus omnino, nunc excipulo unicellulari receptus. Peritetragonidia nunc exserta, nunc strato corticali thalli immersa.

## XXIX. PTILOTA *Ag.*

Thallus parenchymaticus, teres l. compressus, pectinato-pinnatus. Sporocarpia excipulo unicellulari, Sporas conglobatas foventia, pinnulis involucrata. Peritetragonidia in apicibus l. in marginibus pinnularum erumpentia.

Auctoritate Amiciss. *von Suhr* (Flora 1836. 1:ter Band p. 29 et 30) genus Agardhianum in dua saltim genera dividendum

puto, quorum alterum, *P. asplenioidem* atque *P. plumosam* complectens, peritetragonidiis ad margines pinnularum l. (ut in P. asplenioide) in axillis earum erumpentibus, alterum vero, *P. flaccidam* forsanque *P. densam* atque *P. corymbiferam* includens, peritetragonidiis in receptaculis elongatis in multas series coordinatis differre crediderim.

1. Ptilota plumosa *Linn.*

Thallo ramosissimo, ramis ramulisque duplicato-opposite-pinnatis.

α. thallo primario compresso, pinnulis parenchymaticis.

Fucus plumosus *Linn. Mant. p.* 134. — *Gunn. Fl. Norv.* 2. *p.* 91. *Turn. Hist. t.* 60. *fig. a — f.* (optime).
Ptilota plumosa *Ag. Syn. p.* 39. — *Lyngb. Hydr. p.* 38. *t.* 9. *A.*

β. *tenuissima*: thallo primario subteriti, pinnulis confervoideis, cellulis diametrum longitudine aequantibus.

Fucus ptilotus *Gunn. Fl. Norv.* 2. *p.* 135. *t.* 2. *f.* 15.
Fucus pectinatus *Gunn. l. c. p.* 122. *t.* 2. *f.* 8.
Fucus plumosus *var.* tenuior *Wahlenb. Fl. Lapp. p.* 301.
Ptilota plumosa β. filiformis et γ. tenuissima *Ag. Sp.* 2. *p.* 386.
Ptilota elegans *Kütz. Phyc. gen.* 378.

Forma α. in stipite *Laminariae digitatae* l. in Phyceis tenuioribus, a Freto baltico per totam oram Scandinaviae occidentalem usque in fines Finmarkiae; β. l. ut α. Phyceis tenuioribus increscens in fundo 6—8 orgyali extrataeniensi, l. in inferiori aquae limite, rupibus adnata, v. c. ad Molde Norvegiae, a Bahusia usque in fines Finmarkiae. Anno toto, aestate fructificans.

Thallus utriusque formae 6—8 pollicaris, in α. coloris plerumque lactioris, in β. vero obscurioris, plus minus ramosus;

ramuli eleganter duplicato-opposite-pinnati, circumscriptione lanceolati l. subovati; β. differt tenuitate, pinnis saepe pinnulisque semper, ut v. c. in *Callithamnio*, unica cellularum serie constructis. Inter utramque me plane nullum vidisse transitum palam profiteor, ut distinctam facile haberem, nisi aliorum abstaret observatio, v. c. verba Turneri l. c. "ne unus datur in lato Algarum catalogo Fucus, cujus diversae facies, a tenerrima et tenuissima ad latissimam maximeque cartilagineam, gradationibus tam certis atque conspicuis inter se conjunguntur."

## XXX. CERAMIUM *Roth.*

Thallus capillaris, filiformis, ramosus, unica cellularum majorum serie constructus, totus l. ad genicula tantum corticatus. Sporocarpia excipulo unicellulari, Sporas conglobatas foventia, ramulis involucrata. Peritetragonidia ad genicula in strato corticali.

### a. *Geniculis inermibus.*

#### 1. Ceramium rubrum *Roth.*

Thallo dichotomo-ramosissimo, cellulis corticatis l. in medio ecorticatis hyalinis mediis diametro 2—4plo longioribus superioribus brevioribus, peritetragonidiis immersis l. subprominentibus.

α. saturatius ruber, thallo firmiori concolori, cellulis omnibus corticatis brevioribus.

Conferva rubra *Huds. Fl. Angl.*
Ceramium rubrum *Ag. Syn. p.* 60. — *Sp. vol.* 2. *p.* 147. — *Lyngb. Hydr. p.* 118. *t.* 62. *B.* 1. — *Alg. Scand. exs. n.* 55.

β. dilute rubrum, thallo tenuiori, geniculis obscurius coloratis, cellulis ubique tenuius corticatis sublongioribus.

* filis e callo radicali pluribus elongatis cum uno alterove ramo ramulos penicilliformes gerentibus.

γ. purpureo et hyalino variegatum, thallo tenuiori, geniculis corticatis zonato, cellulis in medio ecorticatis hyalinis longioribus.
Conferva diaphana *Lightf. Fl. Scot. (Ag.)*.
Ceramium diaphanum *Roth. Cat. III. p. 154.* — *Lyngb. Hydr. p. 119. t. 37. B.-Ag. Sp. v. 2. p. 150.*

* filis e callo radicali pluribus elongatis cum ramo uno alterove ramulos penicilliformes gerentibus.

Forma α. praesertim in fundo petroso plurium orgyarum cum intra- tum extrataeniensi, l. etiam in rupibus Phyceisque paululum infra limitem aquae; β. cum in societate formae α. in fundo extrataeniensi, tum cum γ. in fundo intrataeniensi ubique vulgaris; β* et γ* in rupibus aestui maris maxime expositis in limite aquae, l. in scrobiculis undas maris excipientibus. — Tota aestate fructificans.

Nulla plane alia nota, quam peritetragonidiis strato geniculorum corticali immersis, l. parum prominentibus, neque majori minorive corticatione thalli, haec atque sequens species inter se differunt. — Forma α. saepe pedalis, optime explicata undique ita corticata, ut concolor sit omnino; cellulae breviores et in latitudinem potius, nam saepe ellipticae sunt, quam in longitudinem explicatae; in β. vero cellulae in longitudinem magis explicantur, quare et in earum medio stratum corticale extenuatur, quo discolor fit thallus, geniculis scilicet obscurioribus cellulisque in medio dilutioribus; in γ. denique, ubi cellulae adhuc magis in longitudinem excrescunt, stratum corticale in earum medio abrumpitur, ubi hanc propter causam hyalinae fiunt. Ceterum observare decet, varia formae γ. specimina ad sequentem thallo se appropinquare, tetragonidiorum natura sem-

per diversa, varietatesque α. β. γ. formis intermediis in natura ita confluere, ut limites trahere velle omnino sit irritus labor.

2. Ceramium tenuissimum *Aresch.*

Thallo tenuissimo capillari dichotomo apicibus forcipatis, cellulis ecorticatis vitreo-hyalinis mediis usque 8plo superioribus 2plo diametro longioribus, geniculis purpureo-corticatis tenuiter zonato, peritetragonidiis subsphaericis exsertis secundis.— Tab. IV. D.

Ceramium diaphanum *Auctor, pro parte.*
Ceramium diaphanum tenuissimum *Lyngb. Hydr. p.* 120. *t.* 37. *B.* f. 4. (mala)
Ceramium diaphanum arachnoideum *Ag. Sp.* 2. *p.* 152?
Gongroceras tenuissimum *Kütz. Linnaea vol.* 14. *p.* 736. (tetragonidiis ignotis)?

In fundo cum intra- tum extrataeniensi, praesertim conchifero, 5-8-orgyali maris Bahusiennis, ex. gr. ad Grundsund, Grafvarna etc. Jun. — Jul. a me lectum.

Thallus 1—3-pollicaris, capillari-arachnoideus, dichotomus, apicibus forcipatis. Cellulae vitreo-hyalinae, mediae usque 8plo, superiores sub2plo diametro longiores; genicula tenuiter corticata, ut latitudo zonae longitudinem ejusdem nunc aequet, nunc duplo sit major. Peritetragonidia ad genicula, omnino exserta; eorum atque tetragonidiorum formatio hoc fit modo: in geniculo explicatur cellula (f. 1. a.), materiem gonimicam in globulum collapsam continens; hic globulus in duos dispartitur, quorum uterque nova cellula circumdatur (f. 2. a. a.); denique hi globuli in tetragonidia, triangulatim demum secedentia, dilabuntur (f. 3. a.)

b. *Geniculis spinulosis.*

3. Ceramium ciliatum *Ell.*

Thallo tenuiori capillari dichotomo apicibus forcipatis, cellulis hyalinis mediis 2—3plo diametro longioribus superioribus

idem subaequantibus, geniculis purpureo-corticatis, spinulis hyalino-articulatis verticillatis, peritetragonidiis sphaericis immersis verticillatis.

Conferva ciliata *Ellis Phil. Trans. (Ag.)*
Ceramium ciliatum *Ag. Sp. v.* 2. *p.* 153. (pro parte) — *Lyngb. Hydr. p.* 121. *t.* 37.

In rupibus undis maris vehementioribus expositis, prope Stavanger Norvegiae, ubi legit *Blytt*, qui specimen communicavit.

A sequente specie abunde differt spinulis, saltim ad geniculа superiora, pluribus verticillatis subuliformibus hyalino-articulatis (nullis cellulis seu granulis coloratis basi repletis) et peritetragonidiis strato corticali geniculorum omnino immersis, l. parum prominentibus.

4. Ceramium acanthonotum *Carm.*

Thallo tenuissimo capillari dichotomo apicibus forcipatis, cellulis hyalinis mediis 2—3plo diametro longioribus superioribus idem aequantibus, geniculis purpureo-corticatis ad exterius furcarum latus spinula singula colorato-cellulosa instructis, peritetragonidiis subobovatis exsertis verticillatis.

Ceramium Acanthonotum *Carm. mscr.* — *J. Ag. Advers. p.* 26.
Ceramium ciliatum *β.* acanthonatum *Hook. Brit.* — *Harv. Man. p.* 100.
Acanthoceras Schuttleworthianum *Kütz. Linnaea vol.* 15. *p.* 739. — *Phyc. gen. p.* 381. *t.* 46. *IV.*

Supra inferiorem aquae limitem ad scopulos abruptos, locis absconditis, in Sinu Moldensi solummodo mihi obvium. Jul. — Aug. lectum.

Thallus usque 2-pollicaris, ruber, nudo oculo e sericeo nitens, valde caespitosus densusque. Cellulae mediae diametro

rarius plus quam 3plo longiores, superiores idem subaequantes; genicula tenuiter corticata. Spinulae e basi lata, intus cellulis purpureis repletae, acuminatae, i. e. subtriangulares, ad exterius tantum forciparum latus obvia, ad genicula solitaria. Peritetragonidia prominenti-exserta, verticillata, obovata.

## XXXI. GRIFFITHSIA.

Thallus capillaris l. filiformis, unica cellularum serie constructus, ecorticatus. Sporocarpia excipulo unicellulari, Sporas conglobatas foventia, ramulis involucrata. Peritetragonidia intra involucrum ramulis verticillatis formatum recepta.

### 1. Griffithsia corallina *Linn.*

Thallo irregulariter dichotomo, cellulis diametro 2—4plo longioribus superne incrassatis, geniculis contractis, involucro peritetragonidiorum ex apice cellularum egrediente.

Conferva corallinoides *Linn. Sp. Pl. ed.* 2. *v.* 2. *p.* 1635.
——— corallina *Lightf. Fl. Scot. p.* 82. *(Ag.)*
Griffithsia corallina *Ag. Sp. v.* 2. *p.* 127.

In fundo extrataeniensi limoso conchifero l. petroso ostreifero, a Bahusia infima, v. c. ad Klädesholmen, usque in Koster, ubi in fundo Segesåta optima; in mari Norvegico prope Christiansund mihi obvia. Jun. — Aug.

Planta elegantissima, coloris metallico-nitentis, aureo-rubri, usque 6-pollicaris. Et Sporocarpia et tetragonidia in planta Bahusiensi optime adsunt.

## XXXII. CALLITHAMNION *Lyngb.*

Thallus capillaris l. filiformis, unica cellularum majorum serie constructus, inferne nunc ecorticatus nunc corticatus. Sporocarpia excipulo unicellulari, Sporas conglobatas foventia. Peritetragonidia exserta, sparsa.

Genus, quale hic est limitatum, a sequentibus sporis intra excipulum unicellulare conglobatis diversum, in plura genera secundum thallum nunc corticatum, nunc ecorticatum, quod in eadem variat specie, ut fecit *Kützing*, dividi non potest. Eodem modo, nisi omnis consequentiae vinculis se liberasset vir ille celeberrimus, *Polysiphoniam* in duo genera, alterum scilicet thallo corticato, alterum thallo ecorticato dividere debuisset. — An denique fructificatio *Callith. seirospermi* sit vere normalis, an quaedam anamorphosis ejusdem, dicere non possum; hanc nondum intellectam in charactere dato respicere nolui, neque propter eandem, hic datam generum *Trentepohliae*, *Spermothamnii* atque *Callithamnii* circumscriptionem falsam judicare possum.

### a. *Pinnis pinnulisque alternis.*

#### 1. Callithamnion hookeri *Dillw.*

Thallo inferne filiformi longissime corticato ramosissimo, ramis pinnatis, pinnis plus minus regulariter pinnulatis, cellulis diametro 2—4plo longioribus, sporocarpiis ad basin l. secus latus superius pinnularum subsolitariis sphaericis, tetragonidiis triangulatim secedentibus. Tab. IV. F.

*a.* thallo subminori magis dense atque regulariter decomposito pinnato, pinnulis patentioribus.

Conferva Hookeri *Dillw. t.* 106.
Callithamnion Hookeri *Ag. Spec. v.* 2. *p.* 178.
Callithamnion pyramidatum *Liebm. in Kröyers Tidskrift Band. II. V. Häft. p.* 479. *t.* 6. *f.* 1.

*b.* thallo majori robustiori laxe et irregulariter decomposito-pinnato, pinnulis subulatis divaricatis.

Callithamnion fruticulosum *J. Ag. Linnaea* 1841. *p.* 46.

In *Furcellaria lumbricali* parasiticum, in fundo 6—9-orgyali extrataeniensi petroso, a Bahusia infima, v. c. extra Tornbjörnskär prope Hälsö, extra Christineberg, Kungshamn etc., usque in Koster. Utraque forma promiscue, at *a.* longe rarior. Jun. — Aug. lectum.

Inter omnes nostras hujus generis species haec maxime insignis thallo inferne, quam in ceteris, multo validiori et longe supra medium corticato; immo specimina paucas lineas longa, jam basi insigniter sunt corticata, ut hac nota facile agnosci debeant. — Sporocarpia, quantum equidem in nostra planta observavi, semper solitaria et versus basin pinnularum, l. secus earum marginem superiorem, inserta, plus minus sphaerica, saepe diversae magnitudinis, ut minime pro peritetragonidiis ab incauto facile haberi possint. Tetragonidia rarius explicantur. Forma *a.* circiter pollicaris, at *b.* usque 3-pollicaris et quoad omnes partes ea robustior; inter utramque tamen nullum plane inveni limitem. Descriptionem *Callithamnii fruticulosi*, ab *Agardh* l. c. datam, hic afferre utile duxi:

"*Callithamnion fruticulosum* nov. sp. caule subcontinuo, ramis undique alterne egredientibus pinnatis, pinnis decompositis, ultimis abbreviatis divaricato-pinnellatis; pinnellis subulatis recurvato-patentibus, articulis cylindraceis, ramorum duplo pinnellarum subquadruplo diametro longioribus, sphaerospermiis obovatis ad axillas pinnellarum superiorum sessilibus."

"Hab. in sinu Codano, in Furcellaria parasiticum."

"Caespes densus 2—3-pollicaris, caulibus pluribus e callo radicali egredientibus. Caules ultra setacei undique ramis pyramidati, articulis difficillime distinguendis diametro duplo longioribus constituti. Rami elongati decompositi, ultimi ramulis brevibus virgati. Pinellae in ramulis ad geniculum quodque divaricate exeuntes, inferiores recurvatae, superiores patentes, omnes subulatae, articulis diametro subquadruplo longioribus."

"Ex descriptis omnibus nulli magis quam Conf. Hookeri Dillw. convenit; nec refragabor si huic identicum esse dies postera docebit. Ut vero hanc delineavit Dillwyn, habitu, articulorum longitudine et ramis minus decompositis eam a nostra distinguere voluerim. Call. Brodiaei Harv. quoad habitum nostram non male refert, at pinellis multo longioribus longiusque articulatis recurvatis acuminatisque diversum. Ad C. granulatum Harv. quoque accedit. Plantam itaque apud nos haud infrequentem lubentius novo nomine insignire, quam illam ubique claudicantem, dubie ad jam cognitas referre volui." — *J. Ag. l. c.*

Legenti primum hanc plantam eadem et mihi visa est distincta species; detecta forma *a*, postquam exemplaria veri *Callith. Hookeri* e Anglia accepissem, tam multas inveni formas intermedias, ut plane mihi sit persuasum utramque specifice non esse diversam. *Callith. pyramidatum* Liebm. in omnibus cum speciminibus tenuioribus *Callith. Hookeri* convenit. Fructificatio, quam memorat vir amicissimus, vix ita nominanda est.

2. Callithamnion polyspermum *Ag.*

Thallo inferne setaceo brevissime corticato, ramis pinnatis circumscriptione subovatis, pinnis simplicibus l. pinnulatis

pinnulisque patenti-horizontalibus, cellulis mediis 4—5plo et superioribus 2—3plo diametro longioribus, sporocarpiis binis subsphaericis, peritetragonidiis ad interius pinnarum pinnularumve latus sessilibus, tetragonidiis triangulatim secedentibus.

Callithamnion polyspermum *Ag. Sp. v.* 2. *p.* 169. — *Harv. Man. p.* 107.
Callithamnion roseum *Lyngb. Hydr. p.* 127. *t.* 39. *A.? (excl. β.)*

*b.* ramis irregulariter pinnatis, pinnis valde elongatis divaricatis.

*Furcellariae lumbricali* aliisque insidens in fundo 3—8 orgyarum plus minus extrataeniensi petroso, a Hallandia septentrionali per oram Bahusiensem parcissime parumque evolutum, v. c. ad Särö, Wargö etc.; in mari Norvegico in limite superiori aquae molibus ligneis adnatus, v. c. ad Molde (Ipse), l. ad rupes ante ostium sinus Oxefjord Norvegiae meridionalis (Lyngbye); *β.* in aqua profundiori Phyceis adnatum prope Molde. Jun. — Aug. lectum.

Forma *a:* Thallus pollicaris l. supra dense caespitosus, ruber, inferne (in nostris saltim speciminibus) nunc subecorticatus, nunc, licet quam in planta anglica brevius, corticatus, cellulis infimis diametro 2plo l. 3plo longioribus; rami circumscriptione ovati l. oblongi, pinnis nunc simplicibus nunc in medio l. apicem versus pinnulatis. Sporocarpia in unico tantum specimine Scandinavico visa. — Specimina anglica *Callith. polyspermi* ab Honoratissima *Griffiths* mihi communicata, a nostra planta nullis essentialibus differunt nisi, ut jum dixi, thallo longius corticato et fere robustiori. — Nostrae formae forsan proximae *Callith. Grevillei* Harv., quod formam levem *C. polyspermi* habet Honoratissima *Griffiths;* nulla tamen illius e Scotia vidi specimina. — Forma *β.* sterilis, 2—3-pollicaris, notis tantum allatis ab *a.* diversa, innumeris formis interme-

diis in eandem abit; ceterum habitu speciminibus tetragonidiiferis *Callith. byssoidis* valde similis et ab iisdem distinctu non semper facilis.

### 3. Callithamnion byssoides *Arnott.*

Thallo inferne capillari brevissime corticato ramosissimo, ramis pinnatis, pinnis pinnulatis cum pinnulis patentibus, cellulis mediis 8plo superioribus 4plo diametro longioribus, sporocarpiis binis l. quaternis lobatis, tetragonidiis triangulatim secedentibus. Tab. V. B.

Callithamnion byssoides *Arnott mscrt.* — *Harv. in Hook. Engl. Fl. 2. p. 342.* — *Harv. Man. p. 107.*

*Furcellariae lumbricali* l. *Gigartinae purpurascenti* plerumque insidens, in fundo petroso extrataeniensi 6—9-orgyali, v. c. extra Wargö, Christineberg, Koster aliisque locis maris Bahusiensis, plerumque unacum *Callithamnio corymboso.* Jun. — Aug. lectum.

Specimina Bahusiensia in omnibus, excepto thallo brevius corticato ejusdemque statura minori, cum speciminibus anglicis, ab Honoratissima *Griffiths* mihi communicatis, tam bene conveniunt, ut, quin nostra species sit omnino anglica, ne minima quidem sit dubitatio. Est haec species *Callithamnio corymboso* quidem affinis, at differt: 1:mo pinnulis patenti-pinnulatis, vix unquam corymbosis; 2:do Sporocarpiis 2—4nis e basi rotundata acute oblongis l. latissimis 2—3-lobatis, lobis acute oblongis, rarissime omnino solitariis. Varia *C. corymbosi* specimina huic quidem ramificatione appropinquant, at inter utriusque plantae diversam fructificationem nullas plane vidi formas intermedias. — Specimina, quae sporocarpia gerunt, tetragonidiiferis pro more minora, ramis, ramulis, pinnis pinnulisque minus elongatis, apud nos plerumque semiunciam, vix unquam unciam longa; tetragonidiifera contra plus quam polli-

caria. Eadem videtur hujus speciei in Anglia ratio, quae et in aliis — cfr. ex. gr. *Callith. corymbosum* — hujus generis speciebus observatur.

### 4. Callithamnion corymbosum *Engl. Bot.*

Thallo inferne ultra setaceo breviter corticato ramosissimo, ramis pinnatis, pinnis multifide dichotomo-pinnulatis dense corymbosis, cellulis mediis usque 12plo superioribus 2—4plo diametro longioribus, sporocarpiis binis l. quaternis subsphaericis, tetragonidiis triangulatim secedentibus. Tab. V. A.

Conferva corymbosa *Engl. Bot. t.* 2352 *(Ag.)*
Ceramium corymbosum *Ag. Syn. p. XXVII.*
Callithamnion corymbosum *Lyngb. Hydr. p.* 125. *t.* 38. *C.* — *Ag. Sp. v.* 2. *p.* 165.

Phyceis variis praecipue vero *Furcellariae lumbricali* innascens, in fundo uni- l. pluriorgyali cum extra- tum intrataeniensi petroso, a Freto baltico per totam oram Scandinaviae occidentalem saltim usque ad Molde atque Christiansund Norvegiae. Jun. — Oct. lectum.

Thallus usque 3-pollicaris et ultra, inferne nunc corticatus (in speciminibus adultioribus) nunc omnino ecorticatus (in speciminibus junioribus). Ramificatione a *C. byssoide* vere diversum, quamquam nonnunquam utriusque adsint specimina sterilia propter evolutionem minorem l. alias causas inter se parum diversa. Sporocarpia rarissime solitaria, saepissime bina, saepe terna, immo quaterna, plus minus sphaerica, at nunquam, ut in *Callith. byssoide*, a rotundata basi oblonga l. 2—3-lobata. Peritetragonidia si respicis, inter utrumque nullam plane video differentiam, quam essentialem habeam.

### 5. Callithamnion seirospermum *Griff.*

Thallo inferne ultra setaceo longius corticato ramosissi-

mo, ramulis pinnatis, pinnis multifide dichotomo-pinnulatis subcorymbosis, cellulis mediis 8—12plo superioribus 3—5plo diametro longioribus, sporis in series in apice thalli fasciculatim congestas concatenatis, tetragonidiis (cruciatim?) secedentibus. Tab. IV. G.

Callithamnion scirospermum *Griffiths in Wyatt. Alg. Danm. n.* 91.! — *Harv. Man. p.* 115.!

Phyceis tenuioribus innascens, in fundo ostreifero Segesåta dicto prope Koster Bahusiae, nec non in fundo sublimoso conchifero portus prope Christiansund Norvegiae. Jun. — Aug.

Thallus 3—6-pollicaris et forsan, saltim prope Koster, ubi specimina maxima integra e fundo extrahere mihi non licuit, major, ramis elongatis undique egredientibus obsessus. Quoad colorem atque habitum cum *Callithammio corymboso* facillime commutatur, quamquam si propius examinetur, differt thallo longius corticato pinnulisque minus corymbosis. Ante omnia vero eminet singularis illa fructificatio, quae eo oritur modo, quod in apice thalli in unaquaque cellula formatur spora, pluresque hoc modo formatae et denique sphaericae, cellulis maternis plus minus resorptis, in series simplices plerumque, at nonnunquam ramosas moniliformiter cohaerent. Hanc plantam formam, anamorphosi quadam fructificationis exortam, *Callith. corymbosi* diu habui, at detectis denique tetragonidiis eorumque singulari natura perspecta, eandem non possum non distinctam habere speciem. Vidi nempe in peritetragonidiis materiem gonimicam in duas partes divisam, unamquamque partem membrana cellulari circumdatam (cfr. Tab. cit. f. 2—4); ex quibus sequi videtur, tetragonidia cruciatim secedere, qua nota haec species ab omnibus hic allatis affinibus optime differt. Ceterum libenter confiteor, fructificationem hujus speciei diagnosi supra datae generis *Callithamnii* male respondere, at neque *Trentepohliae* hanc speciem adscribere, neque ejusdem typo novum condere genus mihi concessum finxi. Quod s

tamen esset licitum, genus novum, inter *Trentepohliam* atque *Callithamnion* quasi medium, ab illa tetragonidiorum praesentia, ab hoc fructificatione diversum esset.

Nonnullae ab auctoribus e maribus Scandinavicis allatae sunt Callithamnii species, quas, cum l. nunquam apud nos, me auctore, sint inventae l. omnino dubiae, hic affere abs re non inutile habeo.

1. *Callithamnion Thujoides* Engl. Bot. secundum Ag. Sp. 2. p. 172. ad Kullaberg Scaniae lectum. De hac specie retulit mihi Am. *J. G. Agardh*, hunc locum casu quodam in *Spec. Algar.* allatum fuisse, et hanc plantam loco illo, quantum sibi notum habuerit, nunquam fuisse lectam.

2. *Callithamnion tetragonum* With. — "In Sinu Codano ad litora Bahusiensia legit primus Bruzelius" Ag. Sp. 2. p. 176. Specimina Bruzeliana mihi plane ignota, nec de iisdem audivi quidquam. Per decem annos in Bahusiensi mari frustra quaesivi plantam, cui varia *C. Hookeri* specimina saepe non dissimilia.

3. *Callithamnion fruticulosum* Lyngb. Hydr. p. 124. t. 38. B. propter "articulos diametrum aequantes" mihi nimis videtur dubium. Ad quam speciem sit referendum, nescio.

b. *Pinnis pinnulisque oppositis.*

6. Callithamnion plumula *Ellis.*

Thallo ramosissimo distiche l. tetrastiche pinnato, pinnis recurvis, sursum pectinato-pinnulatis. Tab. IV. E.

Conferva Plumula *Ellis Phil. Trans.* 57. *t.* 18. *(Ag.)*
Callithamnion Plumula *Lyngb. Hydr. p.* 127. — *Ag. Sp. v.* 2. *p.* 159. — *Alg. Scand. exs. n.* 29.
Conferva floccosa *Fl. Dan. t.* 828. *f.* 1. (Lyngb.)
Callithamnion floccosum *Ag. Sp. v.* 2. *p.* 159.

In fundo petroso 5—10-orgyali cum extra- tum intratacniensi, a Hallandia superiori per totam oram Bahusiensem, v. c.

extra Winga, in Hållöberg extra Grafvarne, in fundo ostreifero Segesåta dicto prope Koster, nec non ad oram Norvegicam saltim usque ad Christiansund, minime infrequens. Jul. — Sept. fructificans.

Thallus usque 4-pollicaris, amoene roseus, ramosissimus. Rami ramulique vagi pinnae saepe oppositi. Pinnae $\frac{1}{3}$ l. $\frac{1}{4}$ infra cellularum apicem egredientes plantam habitu sublanoso induentes plerumque distiche l. rarius tetrastiche oppositae, nunc in apicibus speciminum juniorum subhorizontaliter incurvae, sursum pectinato-pinnulatae; pinnulae nunc simplices nunc exteriori latere pinella una alterave, quo illae saepe dichotomae videantur, obsessae, nunc regulariter pinnulatae. Cellulae thalli omnes ecorticatae, infimae diametrum longitudine aequantes, superiores eodem 3—4plo longiores, in medio saepe contractae. Sporocarpia plerumquae bina l. plura, rarius solitaria, globosa l. subelliptica, ad ramulos sessilia. Peritetragonidia ovata, sessilia l. podicellata, ad latus superius pinnarum l. exterius pinnularum fixa, i. e. locum pinnularum l. pinellarum occupantia, tetragonidiis cruciatim secedentibus.

Specimina *C. floccosi* Ag. authentica quamquam non viderim, tamen, descriptione ductus, cum *C. Plumula* idem conjungere non dubito; quae enim a Rev. viro *C. floccoso* tributae sunt notae, eae etiam in *C. Plumula* inveniuntur.

### 7. Callithamnion cruciatum *Ag.*

Thallo ramoso distiche l. tetrastiche pinnato, pinnis patentibus utrinque pinnulatis.

Callithamnion cruciatum *Ag. in Reg. Bot. Zeit.* 1827. *p.* 655. *(Ag.)* — *Sp. v.* 2. *p.* 161. — *Harv. Man. p.* 114.

*β. radicans:* thallo primario reptante, pinnulis secundis elongatis.

Callithamnion cruciatum β. radicans *J. Ag. Linnaea* 1841. *p. 44.*

Forma *a.* in *Ostrea eduli*, in fundo 3—6-orgyali intrataeniensi Segesåta dicto prope Koster; β. in *Corallina officinali* ad Kärringön Bahusiae in fundo extrataeniensi pluriorgyali. Jul. — Aug.

Formae *a.* specimina Bahusiensia: Thallus roseus uncialis filis e callo radicali paucioribus. Rami ramulique vagi (pinnae interdum oppositi); pinnae paululum infra apicem uniuscujusque cellulae distiche l. tetrastiche egredientes, oppositae, patentes, pinnulatae; pinnulae, ut pinnae, rectae et elongatae oppositae, abortu nonnunquam subalternae. Cellulae ecorticatae inferiores diametro usque 5plo longiores. Sporocarpia incognita, neque tetragonidia in nostris speciminibus adsunt. — Descriptio formae β. apud J. Ag. l. c. sequens: "Fila uncialia subcapillaria; primarium repens, radicibus elongatis ter quaterve geniculatis globo radicali terminatis; secundaria erecta opposita pinnas plerumque secundas articulis 9—12 constitutas ad geniculum fere quodque emittentia. Articuli in radiculis quadruplo, in filo primario atque secundariis triplo duplove diametro longiores cylindracei, geniculis pellucidis" — "Habitus a C. cruciato admodum diversus; ut C. variabile ad C. Turneri, ita varietas allata ad speciem primariam sese habere videtur." *J. Ag. l. c.*

## XXXIII. SPERMOTHAMNION *Aresch.*

Thallus capillaris unica cellularum serie constructus, ecorticatus. Sporocarpia, excipulo nullo, sporae in capitulum glomeratae. Peritetragonidia sparsa l. aggregata.

Genus, typo *Callith. Turneri* Auctor. formatum, notis allatis, ut credo, a *Callithamnio* supra limitato melius quam a

*Trentepohlia* distinctum. Ab illo differt defectu excipuli et sporis e receptaculo fere erectis, capitato-glomeratis; ab hac cum fructificatione tum tetragonidiorum praesentia. Ad Spermothamnion ceterum pertinere videntur *Callith. barbatum* Ag., *Callith. irregulare* J. Ag., *C. variabile* Ag., nec non *C. Pluma* Ag.

### 1. Spermothamnion turneri *Mert.*

Thallo pinnato, pinnis horizontali-patentibus simplicibus l. subpinnulatis oppositis l. (abortu) alternis, cellulis inferioribus 4—8-plo superioribus 3—4-plo diametro longioribus, glomerulis sporarum pinnulis involucratis.

α. *Turneri:* fructificans, thallo usque unciali, pinnis oppositis plus minus opposite pinnulatis, cellulis subbrevioribus. Tab. V. C.

Ceramium Turneri *Mert. in Roth. Cat. III. p.* 128. *t.* 5.
Callithamnion Turneri *Ag. Sp. v.* 2. *p.* 160.

β. *roseolum:* sterile l. tetragonidiiferum, thallo 1—2-unciali, pinnis pinnulisque alternis l. secundis.

Callithamnion roseolum *Ag. Sp. v.* 2. *p.* 182. — *Alg. Scand. exs. n.* 30.
Callithamnion repens *Harv. Man. p.* 115.

γ. *repens:* sterile l. tetragonidiiferum, thallo 1—3 lineas alto, filis repentibus, pinnis alternis l. secundis, articulis diametro usque 4plo longioribus.

Conferva repens *Dillw. t.* 18.
Callithamnion repens *Lyngb. Hydr. p.* 128. *t.* 40.

Phyceis praesertim *Furcellariae lumbricali* innascens; α. in fundo extrataeniensi petroso pluriorgyali per totam oram Ba-

husiensem non infrequenter; β. in fundo cum extra- tum intratacniensi, saepe cum priori, a Freto baltico usque in Norvegiam saltim meridionalem; γ. ubique cum β., l. optimum iis locis, ubi β. propter externa momenta minus faventia normaliter se explicare nequit. Forma α. Jul. — Aug. optime fructificat.

Forma α.: Thallus format nunc caespitem solitarium, nunc, pluribus caespitibus dense approximatis, stratum in *Furcellaria* densissimum, usque, quamquam rarius, unciam altum, filis saepe repentibus colorisque rubri. Pinnae normaliter oppositae rarius alternae, pinnula una alterave instructae. Cellulae diametro 4—8-plo longiores. Glomeruli sporarum podicellati, podicello ex una l. altera cellula formato, pinnaeque pinnulaeve opposito, pinnulis plus minus numerosis atque elongatis, l. interdum nullis, involucrati. Peritetragonidia nunc ad superius pinnarum latus podicellata, nunc in illarum ad unam l. alteram cellulam contractarum apicibus solitaria l. congesta. Forma β.: Thallus major, 1—2-uncialis, purpureus l. sordide albescens; in speciminibus minoribus pinnae plerumque sparsae, sed etiam oppositae, in majoribus vero semper alternae l. secundae. Forma γ. locis, vegetationi formae β. faventibus, in hanc plane abit; in fundo vero, qui dicitur, mortuo persistit, quoniam β. hic se explicare nequit. Quamquam unicuique observatori, supra allatas formas, ab auctoribus species plerumque habitas, unam eandemque esse speciem perfacile persuaderi possit, tamen hic verba Harveyii in *Man. of British Algae* in defensionem meam vocare volo: "Except that the branches (de Callith. repente dicit; cfr. supra) are *alternate*, not opposite, this species differs in no respect from *Callith. Turneri*. But specimens frequently occur partly referable to one, partly to the other. The *C. variabile* of Agardh seems completely to unite them" — Alternitas pinnarum evolutione sporocarpiorum atque tetragonidiorum facile declarari potest; inde et primum fructificantia gaudent pinnis oppositis.

## XXXIV. TRENTEPOHLIA *Ag.*

Thallus infra-capillaris, unica cellularum serie constructus, ecorticatus. Sporocarpia, excipulo nullo, sporae cellulis transmutatis ortae plus minus glomeratae l. seriatae. Tetragonidia nulla (?)

Fructum si respexeris, genus inter Florideas infimum transitumque ad Ulvaceas quodammodo offerens; sporae enim eodem modo, ut hologonidia in *Confervis*, explicantur, i. e. singulae in singulis thalli cellulis, at vicinis, et in glomerulos aggregantur. In variis *Trentepohliae Dawiesii* formis adsunt tamen sporae solitariae l. sparsae, quas, ut in *Ectocarpo*, sic et hic hologonidia facile diceres. In *Trentepohlia* tamen sporae in sporocarpium, quod in *Spermothamnio* luculentum luculentiusque in *Callithamnio*, se appropinquare tendunt. Nec mirum, cum sporarum genesin atque hologonidiorum consideramus, si earum infimus evolutionis gradus cum horum supremo saltim in plurimis congrueret.

### 1. Trentepohlia rothii *Turt.*

Thallo caespitose-pannoso-investiente, ramis ramulisque elongatis sparsis erectis, cellulis diametro sub2plo longioribus, sporis in ramulis abbreviatis corymbosis.

Conferva Rothii *Turt. Syst. of Nat.*
Callithamnion Rothii *Lyngb. Hydr. p.* 129. *t.* 41. *A.* — *Ag. Sp. v.* 2. *p.* 187. — *Alg. Scand. exs. n.* 8.

Ad rupes abruptas l. moles ligneas, locis fere absconditis, in limite maris l. in stipite *Laminariae digitatae* in fundo pluriorgyali, ab Hallandia septentrionali per totam oram Bahu-

siensem Norvegicamque, v. c. ad Molde, usque in litora Finmarkiae. Toto anno; hyeme, secundum auctores, fructificans.

In matrice format velamen, e caespitibus confluentibus formatum, nunc tenuissimum vix ¼ lineam, nunc ⅓ unciam crassum, undulato-crispum. Fila thalli quam in *T. Daviesii* licet plerumque 2plo fere crassiora, tamen tenuissima hujus atque crassissima illius crassitie fere aequant. Saepissime idcirco, cum non adest fructificatio stationemque *T. Rothii* — in stipite *Laminariae digitatae* l. in rupibus — respicere non vis, vix nisi ramis patenti-parallelis et habitu quodam, verbis difficile exprimendo, utraque differt. Fructificatio, quae in hyemalibus speciminibus anglicis mihi tantum est nota, constat sporis glomeratis, nec sporis in series coordinatis. Ceterum in hac specie, ut in *T. Daviesii*, sporae nonnumquam sparsae sunt sive solitariae.

An nostra *Trentepohlia Rothii* in stipite *Laminariae digitatae* crescens, sit forsan *Callithamnion sparsum* Harv. Man. p. 117, cum illius fructificatio mihi plane sit ignota, dicere nequeo. De hoc sequentia verba apud Harv. l. c. — "capsules obovate, sessile, mostly axillary (Carm.)" — et: "It is better distinguished from *Callith. Rothii* by its minute size and scattered habit than by any peculiarity of branching. The fruit, however, is very different." — Testante eodem auctore *C. Rothii* in Anglia rupibus tantum increscit, cum contra *C. sparsum* in stipite *Laminariae digitatae* observatur.

### 2. Trentepohlia dawiesii *Dillw.*

Thallo solitario-caespitoso l. pannoso, investiente, ramis patentibus ramulis nunc sparsis elongatis nunc secundis abbreviatis, cellulis diametro 2—8-plo longioribus, sporis seriatis glomeratis.

Conferva Dawiesii *Dillw. Intr. p. 73. t. J.*

Callithamnion Dawiesii *Lyngb. Hydr. p.* 129. *t.* 41. *B.* 1—3. *Ag. Sp. v.* 2. *p*, 186.

*α.* caespitibus roseis subsphaericis in matrice distantibus, filis tenuissimis, ramis ramulisque sparsis elongatis subattenuatis, cellulis diametro 4plo l. 8plo longioribus. Tab. V. D.

Callithamnion spinulosum *von Suhr.* (an ad hanc formam potius?)

*β.* caespitibus purpureis penicilliformibus in matrice subconfluentibus, filis validioribus, ramis ramulisque sparsis, cellulis diametro 2—3-plo longioribus.

Trentepohlia mirabilis *v. Suhr in Flora* 1839. 1:*ster Band. p.* 15. *t. IV. f.* 47. (sec. specimina auctoris).

*γ.* rosea, subpenicilliformis, pubescenti-investiens, filis tenuioribus, ramis ad unumquodque geniculum alternatim l. secunde egredientibus abbreviatis obtusis, cellulis diametro 2—3-plo longioribus.

Callithamnion virgatum *Harv. in Hook. Engl. Fl. v.* 2. *p.* 349 (in *Man. of British Algae* cum *C. Dawiesii* conjunctum).

* Callithamnion lanuginosum *Lyngb. Hydr. p.* 130. *t.* 41. *C.*

** Callithamnion Pubes *Ag. Sp. v.* 2.

*δ.* caespitibus roseo-purpureis penicilliformibus in matrice sparsis l. densius approximatis, filis tenuibus, ramulis secundis abbreviatis.

Callithamnion Dawiesii *β.* secundatum *Lyngb. Hydr. p.* 129. *t.* 41. *B. f.* 4—6.
Callithamnion secundatum *Ag. Sp. v.* 2. *p.* 187.

In Phyceis parasitica, ab Hallandia superiori per totam Sveciae Norvegiaeque oram occidentalem saltim usque ad

Christiansund; α. characteristica praecipue in ramis ramulisque *Gigartinae purpurascentis*, in fundo pluriorgyali maris Bahusiensis; β. iisdem locis in *Furcellaria lumbricali*; γ. in eodem fundo *Ceramio rubro* atque *Callithamniis* insidens; δ. denique in *Porphyra laciniata*, *Rhodomela palmata* nec non *Rhodomenia mamillosa* in superiori limite aquae, ad rupes exteriores Norvegiae praesertim vulgaris. — Tota aestate.

Forma α. elegantissima omnium, quoniam in ramulis illius *Gigartinae*, vegetatione continue se elongantibus, caespites inter se longius removentur, subsphaerica, lineam diametro aequans, filisque quam in β. tenuioribus. — Forma β. gaudet caespitibus penicilliformibus, in *Furcellaria* plus minus confluentibus, roseo-purpureis; fila quam in α. pro more validiora cellulisque brevioribus, at utramque ita variantem inveni, ut fila in α. aeque ac in β. crassa cellulasque illius aeque ac hujus longas viderim. Utrique formae bene explicatae adest semper fructificatio pulcherrima. — Forma γ. formam β. cum δ. quoad ramulorum sedunditatem optime conjungit; ubi tenuissima, matricem v. c. *Ceramium rubrum* habitu pubescente induens; utrum ad *C. Dawiesii* Ag., an ad *C. secundatum* Ag sit referenda, pro certo dicere nequeo. Ramuli illi abbreviati et obtusi utrum ramorum sint primordia, an formatio fructificationis, mihi non patet. In γ. et δ. nullam fructificationem inveni. — Omnes ceterum formae formis intermediis numerosissimis confluunt.

Ordo III. Epispореae. *Char. ess.* Sporocarpia externa, nuda, Ascis saepeque filis paraphysoideis intermixtis constituta, totum stratum corticale thalli formantia l. in hoc sparsa punctistriae- l. maculaeformia.

Thallus olivaceus l. rarissime purpurascens, crustaceus, filiformis, frondosus l. in partes cauli- atque foliiformes discretus. Asci cum filis paraphysoideis verticaliter thallo impositi

et cum his stratum corticale constituentes, l. in Sporocarpia descriptae formae et in thallo sparsa collecti. Minus igitur thalli forma quam fructificatione insigni, hic Ordo, familias *Laminariearum*, *Sporochnearum*, *Dictyotearum* atque *Chordariearum* comprehendens, insigniter differt. "Fila" illa "articulata" Auctorr., quibus saepe stipantur asci, paraphysibus Lichenum atque Fungorum in omni re tam sunt similia, ut de identitate utrorumque vix par sit dubitare. Sori itaque *Dictyotearum* plane idem ac Lichenum thalamia, quorum nomen et iis tribuit *Meneghini*. Quantum equidem observare potui, asci semper unispori sunt. An Peysonellia huc vere pertineat, haud dicere ausim. — De schizogonidiis atque hologonidiis vide infra.

Fam. VII. Laminarieae. *Char. ess.* Sporocarpia, Ascis filisque paraphysoideis simplicibus intermixtis constituta, indeterminate-maculaeformia, in thallo sparsa.

Thallus saltim tribus cellularum stratis constructus, structurae quam reliquae omnes Phyceae magis complicatae, saepissime coriaceus, inferne callo radiciformi terminatus, nunc stipite in laminam integram l. fissam, costatam l. ecostatam expanso, nunc in partes cauli- atque foliiformes discretus, in *Alaria* aliisque alveolis punctiformibus, sev poris, e quibus, ut in Fucis, fila confervoidea exeunt, adspersus. Fructificatio in nulla Scandinavica specie a me visa, e descriptionibus illius in *L. bulbosa* atque *L. saccharina*, a Cel. *Decaisne* (Annal. d. Scienc. nat.) datis, mihi solum nota. Secundum hunc observatorem fila paraphysoidea unica cellula sunt constructa. Hologonidia in his plantis non desiderari videntur. In *Alaria esculenta* nec non *Laminaria digitata* (specim. anglic.) maculae coloris obscurioris, quae e filis cellularibus thallo verticaliter impositis densissimeque compactis sunt formatae; horum filorum cellula suprema, ceteris plerumque magis inflata, hologonidium sine dubitatione includit. Cfr. ceterum *Kütz. Phyc. gen.* de *Alaria esculenta*.

## XXXV. ALARIA *Grev.*

Thallus stipitatus, stipite distiche pinnato, superne costa laminam integram elongatam percurrente. Sporocarpia maculaeformia in stipitis pinnis?

Quantum adhuc expertus sum, vera fructificatio in *Alaria* nondum inventa est; tamen, quin cum *Laminariae* conveniat, et in pinnis, ubi hologonidia adsunt, suam habeat sedem, vix dubitari potest. In speciminibus Norvegicis hujus plantae adsunt in pinnis stipitis maculae hologonidiiferae, e filis verticalibus singulis singula cellularum serie compositis et superne in cellulam ellipticam majorem desinentibus, constructae. Organa haec bene delineavit *Kütz. Phyc. gen. t.* 32. *I.*, eaque "opseospermata" nominavit.

### 1. Alaria esculenta *Linn.*

Fucus esculentus *Linn. Mant.* 1. *p.* 135. — *Wahlenb. Fl. Lapp. p.* 494.
Laminaria esculenta *Lamour.* — *Lyngb. Hydr. p.* 23. — *Ag. Sp.* 1. *p.* 110.
Alaria esculenta *Grev. Alg. Brit.*

Ad rupes paululum infra limitem inferiorem aquae, undis maris aperti expositas, a Stavanger per totam Norvegiae oram usque in litora supremae Finmarkiae. Aestate.

Specimina juniora jam costa, adultiora sola pinnis in stipite ornata; lamina in adultis usque 8-pedalis et forsan ultra octoque uncias non raro lata, apice undarum vi delacerata et a margine in costam exscissa. Pinnae stipitis subcoriaceae substantiaeque quam lamina firmioris.

## XXXVI. LAMINARIA *Lamour.*

Thallus stipitatus, stipite nudo superne in laminam ecostatam elongatam indivisam l. palmatim fissam abeunte. Sporocarpia maculaeformia in lamina.

### 1. Laminaria saccharina *Linn.*

Thallo scrobiculato margine undulato-crispo lineari oblongo.

Fucus saccharinus *Linn. Sp. ed.* 1. *v.* 2. *p.* 1161. — *Wahlenb. Fl. Lapp. p.* 493.
Laminaria saccharina *Lamour.* - *Lyngb. Hydr. p.* 21. *t.* 5. - *Ag. Sp. v.* 1. *p.* 117. — *Alg. Scand. exs. n.* 63 *(junior).*
Laminaria phyllitis *Stackh.* — *Ag. Syn. p.* 19. — *Lyngb. Hydr. p.* 21.

*a.* stipite longissimo, lamina basi subacuta.

*b.* stipite 2—4-unciali, lamina basi rotundata.

Ad rupes lapidesque ulnam circiter infra limitem aquae usque in profunditatem plurium orgyarum, cum in ostiis sinuum tum in interioribus earum partibus, per totam oram Scandinaviae occidentalem, a Freto baltico usque in fines ultimos Finmarkiae orientalis. Toto anno.

Inter *a.* et *b.* nulli plane, characterem si respexeris, limites; haec in fundo ostreifero, extra Christineberg Bahusiae, prope Långö praecipue characteristica, stipite brevi laminaque 4—6 ulnas longa pedemque lata insignis. Equidem nullas hujus speciei, quae distinctae habeantur species, dignas inveni formas; quas specifice diversas habet *Kütz. in Phyc. gen.*, eas ne levissimas quidem formas nominare possum; easdem et in ma-

ribus Scandinaviae crescere vix dubitari potest. Quod ad *Lam. phyllitem* attinet, quae de hac forma in Linnaea 1842 dixi, adhuc defendere cogor; ita nempe nominantur *Laminariae saccharinae* specimina substantiae tenuioris, et plerumque in aqua profundiori, praesertim inter conchas cochleasque crescentia; formam huc pertinentem maxime insignem prope Christiansund Norvegiae, in fundo conchifero legi: Stipes tenuissimus, 2 lineas circiter longus; lamina usque 8-pollicaris unciamque lata, e basi acuta lanceolata, subplana, membranacea (fere ut Ulva latissima) colorisque flavescenti-viridis; at transitus inter eandem et primariam *L. saccharinae* formam luculenti.

2. Laminaria digitata *Linn.*

Thallo laevi margine plano suborbiculari l. lineari, integro l. in lacinias palmatim diviso.

*a. vera:* thallo olivaceo elliptico l. oblongo in plures lacinias lineares fisso, stipite usque pedali. — *Aresch. Linnaea 1842. p. 225.*

Fucus digitatus *Linn. Mant. p. 134. — Wahlenb. Fl. Lapp. p. 492.*
Laminaria digitata *Lamour. Ag. Syn. p. 18. — Lyngb. Hydr. p. 20. — Alg. Scand. exs. n. 64.* (junior).

*b. latifolia* thallo flavescenti-olivaceo elliptico l. oblongo in lacinias pauciores latioresque fisso l. integerrimo, stipite breviori. — *Aresch. l. c.*

Laminaria latifolia *Ag. Sp. v. 1. p. 119.*
Laminaria ensifolia *Kütz. Phyc. gen. p. 345.*

Paullulum sub infimi refluxus limite l. in fundo plurium orgyarum rupibus lapidibusque adnata, a Freto baltico per totam oram Scandinaviae occidentalem, locis cum extra- tum intrataeniensibus, usque in promontorium septentrionale Nord-

kap Finmarkiae ubique vulgaris; *b.* praesertim in sinuum partibus interioribus, ubi parum ventis agitatur aqua, v. c. ad Christineberg Bahusiae ad Långegap, multisque sine dubitatione Norvegiae locis. Toto anno.

Haec species in mari Bahusiensi orgyam, quantum vidi, raro longitudine superans, stipiteque digito minori nunquam crassiore, ad litora Finmarkiae, secundum *Wahlenberg*, gaudet saepe thallo 2-plo 3-plove quam homo longiore, stipiteque brachium crassitie saepe aequante. Forma *a.* et *b.* colore optime distinguuntur; ad hanc *L. latifoliam* Ag. Sp. referre non dubito, cum descriptio l. c. data cum nostris specimibus optime conveniat. — *Laminariam ensifoliam* Kütz. ad formam *b.* omnino pertinere, specimina a Cel. *v. Suhr* mihi communicata edocuerunt. Novum itaqne, cum *Laminaria digitata* sub novo genere *Haſgygia* ab hoc viro allata sit, exemplum, formas ejusdem speciei a *Kützing* ad diversa referri genera.

Juniora hujus speciei specimina junioribus *Laminariae saccharinae* ita similia, ut illa vix, nisi interdum lamina magis plana substantiaque firmiori, difficile dignosci possint. In illis demum, pergente in superiore laminae parte extentione thalli horizontali, ab apice versus basin in lacinias plus minusve numerosas dividitur lamina, quamquam in omnibus speciebus non aeque mature; alia enim legi 2 pollices lata pedemque longa apiceque modo in duas l. plures lacinias pollicares divisa, alia contra 6 pollices tantum longa et jam in plures lacinias, ut in vulgari atque normali forma, usque in basin fissa. Haec laminae divisio in omnibus immediate e sporis gonidiisve enatis individuis normalis facile haberetur. Cum vero ad basin veteris laminae nova formatur lamina, illam in altum tollens, nova haec lamina in medio rimis longitudinalibus in lacinias lineares, a superimposita veteri lamina apice saepe diu connectas, dividitur; quae tamen divisionis modus normalis minime est considerandus. — In forma *b.* divisionem cum ex

apice versus mediam laminam, tum e basi versus apicem rimis longitudinalibus effectam vidi; hic tamen ipsa lamina non prius dividitur, quam assecuta est latitudinem, quam in priori forma, cum efficitur divisio, longe majorem.

Obs. 1. Stipes *Laminariae* cujusdam (cfr. J. Ag. Linnaea 1841 p. 4), forsan *Laminariae longicruris* Lapylaie, *Lepade anatifera* obsessus, in litora Bahusiensia autumno rarius ejicitur. Stipes, quem possideo, utrinque defractus, simplex, partim fistulosus partim farctus, attenuatus, apice crassiori quinque, in tenuiori vero duas fere lineas aequans, longitudine fere 10-pedalis. Ad litora Scandinavica cum haec species vix crescat, ex Islandia, ubi secundum Amiciss. *Liebman* invenitur, undis certe adportatur.

Obs. 2. *Fucus bifurcatus* Gunner. Act. Nidros. IV. p. 86. t. 6. f. 2. Fl. Norv. v. 1. p. 96. ab auctoribus, v. c. *Agardh*, ad *Laminariam bulbosam* relatus, secundum Endlicher, gen. supplem. 2. p. 27, est *Laminaria Bongardiana* Postels et Rupr. Illustr. Alg. p. 10. f. 13, 14 et p. 5. t. 39. f. 44. Cum vero neque hoc opus, neque specimen *Gunneri* viderim unquam, nil omnino hac de re dicere possum. Planta *Gunneri* videtur forma quaedam *L. digitatae.*

Fam. VIII. Sporochneae. *Char. ess.* Sporocarpia ascis ad fila paraphysoidea normaliter ramosa lateraliter adnexis contituta, capituliformia, in thallo sparsa.

Thallus structurae in diversis generibus satis diversae, filiformis, plus minus compressus l. planus. Sporocarpia constituuntur filis plus minus ramosis brevibus, ascos laterales gerentibus, paraphysoideis. Fructificationem in nulla Scandinavica specie vidi; neque hologonidiorum neque schizogonidiorum vestigium inveni unquam.

## XXXVII. DESMARESTIA *Lamour.*

Thallus teres, compressus l. planus, structurae magis complicatae, strato exteriori cellulis majoribus arcteque conjunctis, et interiori heteromorphis formato constructus. Fructificatio ignota. Rami vere l. aestate prima penicillis filorum ectocarpoideorum suboppositis ornati.

Omnes huc relatae species, ignota vera fructificatione, propter habitum externum in unum conjunctae; notae genericae itaque potissimum negativae et character regulis artis minus conveniens. Quae cum ita sint, *Dichloriam viridem* Grev., cujus fructificatio plane est ignota, et huc referre non dubitavi.

### 1. Desmarestia aculeata *Linn.*

Thallo inferne terete superne compresso ramoso, ramis ramulisque margine spinulosis.

Fucus aculeatus *Linn. Sp. ed.* 2. *v.* 2. *p.* 1632. — *Wahlenb. Fl. Lapp. p.* 502.
Sporochnus aculeatus *Ag. Syn. p.* 10. — *Sp. Alg.* 1. *p.* 151.
Desmarestia aculeata *Lam. ess. p.* 25. — *Alg. Scand. exs. n.* 62.
Desmia aculeata *Lyngb. Hydr. p.* 34.
Ectocarpus densus *Lyngb. Hydr. p.* 133. *t.* 44. *B.* (filor. ectocarpoideor. penicill.)

In fundo uni- l. pluriorgyali petroso cum intra- tum extrataeniensi, a Freto baltico per totam oram occidentalem Scandinaviae usque in Finmarkiam, v. c. ad Kärringoe et Renoe (Blytt), frequenter. Toto anno.

Thallus basi lineam circiter crassus, interdum plures pedes longus, coloris olivacei in aere non tam cito, ac in sequente, mutabilis. Spinulae non nunquam, praecipue in speciminibus vegetationis retardatae, obsoletae, cum adsunt, alternatim distichae. Penicilli filorum ectocarpoideorum 2—3 lineas longi, pro more oppositi, flavescenti-virides; fila ramosa, ramis saepissime oppositis attenuatis, cellulis diametro 2-plo l. 4-plo longioribus, intus plerumque granulis (schizogonidiis?) repletis.

2. Desmarestia viridis *Fl. Dan.*

Thallo tereti filiformi pinnato, pinnis pinnulisque oppositis.

Fucus viridis *Fl. Dan. t.* 886. *(Ag. Sp.)* — *Wahlenb. Lapp. p.* 503.
Chordaria viridis *Ag. Syn. p.* 14.
Desmarestia viridis *Lamour. ess.*
Gigartina viridis *Lyngb. Hydr. p.* 44.
Sporochnus viridis *Ag. Sp.* 1. *p.* 154.
Dichloria viridis *Grev. Alg. Brit.* — *Alg. Scand. exs. n.* 54.

Rupibus l. Phyceis adnata, nunc in inferiori aquae limite, nunc in fundo pluriorgyali cum intra- tum extrataeniensi, a Freto baltico per totam oram Scandinaviae occidentalem usque in promontorium Nordkap, ubique fere frequenter. Toto anno.

Thallus basi ¼ lineam circiter crassus, deinde attenuatus, in Bahusiensi mari unum, in Norvegico saltim ad Christiansund, plures pedes longus, coloris in aqua violacei, qui, aeri exposita planta, mox in prasinum abit. Penicilli filorum ectocarpoideorum in ramulis junioribus solummodo adsunt, et, ut in priori specie, ita et in hac, ab initio Martii usque in finem mensem Junii observantur; in quorum cellulis schizogonidia formari nemo quidem est, qui observaverit, planta vero apud nos

frequentissima, cujus fructificationis ne minimum inventum est vestigium, vix alio modo quam schizogonidiis se multiplicare potest.

Fam. IX. Dictyoteae. *Char. ess.* Sporocarpia, Ascis filisque paraphysoideis simplicibus intermixtis constituta, puncti-, verruccae- l. striaeformia in thallo sparsa.

Thallus normaliter e duabus stratis conflatus, nempe interiori sev centrali cellulis plerumque majoribus, et exteriori cellulis minoribus confecto, quorum hoc illi in Chordaricis intermedio supraque memorato correspondet; huic inserta sunt Sporocarpia, stratum exterius, filis paraphysoideis et sporis formatum Chordaricarum representantia. Thallus quoad formam filiformis, linearis l. frondosus. Fila paraphysoidea cellularia l. ex unica cellula elongata formata, interdum aboriuntur, Asci, ut videtur, pro more unispori, at in *Peyssonelliae*, si huc vere pertineret, ascis quattuor adsunt sporae. Perihologonidia, in aliis quam fructificatio individuis normaliter explicata, per totum thallum l. in certis ejus partibus sparsa. Schizogonidia rariora, in quibusdam plantis solum observata sunt; cfr. infra.

## XXXVIII. DICTYOTA *Lamour.*

Thallus membranaceus ecostatus dichotomus l. irregulariter fissus, strato interiori cellulis majoribus, et exteriori cellulis minoribus formato constructus. Sporocarpia soriformia per thallum sparsa l. in lineas transversales collecta.

### 1. Dictyota dichotoma *Huds.*

Thallo basi attenuato integerrimo dichotomo, apicibus furcatis, sporocarpiis in medio thallo longitudinaliter sparsis.

*a.* thallo superne aequali subplano, segmentis vix intricatis.

Ulva dichotoma *Huds. Fl. Angl.* — *Lyngb. Hydr. p.* 31. *t.* 6. *C.*
Dictyota dichotoma *Lamour.* — *Alg. Scand. exs. n.* 69.
Zonaria dichotoma *Ag. Sp. Alg.* 1. *p.* 133.

*b.* thallo superne sensim attenuato, segmentis densioribus intricatis.

Zonaria dichotoma *β.* intricata *Ag. Sp.* 1. *p.* 134.

In scopulis nonnullas orgyas sub aqua demersis extrataeniensibus, v. c. in Hållöberg extra Grafvarne, ad Väderöarne etc.; l. in fundo ostreifero intrataeniensi, at non copiose, v. c. in Segesåta prope Koster; *b.* prioribus praesertim locis cum *a.* Jul. — Oct.

In forma *a.* thallus 5—6-uncialis et segmenta ultima lineam saltim lata, coloris nitentis et virescenti-olivacei; in *b.* thallus plerumque longior segmentaque ultima ¼ lineam latitudine vix superantia, coloris forsan intentioris. Inter utramque tamen transitus sunt luculenti. — Specimina hologonidiifera speciem (*Dichophyllum dichotomum* Kütz.) a fructiferis (*Dichophyllum vulgare* Kütz.) diversam habet *Kützing.* Eodem modo *Haliseris polypodioides* in duas species distinctas separari debet.

## XXXIX. PUNCTARIA *Grev.*

Thallus coriaceo-membranaceus frondosus, simplex, strato interiori cellulis subrectangulis, et exteriori subisomorphis minoribus formato constructus. Sporocarpia soriformia per thallum sparsa.

1. Punctaria plantaginea *Grev.*

Thallo castaneo-brunneo subcoriaceo oblongo l. oblongo-obovato basin versus attenuato.

Ulva rubescens *Lyngb. Hydr. p.* 27. *t.* 7. *A.*
Punctaria plantaginea *Grev. Alg. Brit. p.* 53. *t. IX.*

In rupibus declivibus undas vehementissimas excipientibus, ulnam unam l. alteram sub limite superiori aquae, a Släp Hallandiae borealis per totam oram Bahusiensem, v. c. ad Styrsö, Kärringön, Gåsö, Koster etc. frequenter; et sine dubitatione per totam oram Norvegicam usque in Alstenoe (Blytt). Maj — Jul.

Thallus longitudine saepe 8-pollicaris unciamque latitudine superans, nunc obovatus nunc oblongus l. sublinearis, mox integer mox apice in duas l. plures lacinias lineares fissus, substantiae, quam sequentis, firmioris. Structura interior, quantum equidem videre possum, sectione transversali examinata, cum f. 2. III. t. 24. *(Laminariae fasciae)* in Kütz. Phyc. gen. bene convenit, neque cum f. 1. II. t. 24 *(Punctariae latifoliae)*, ex quo vanum mihi videtur conamen, in figura cellularum atque magnitudine, generum specierumque semper condere velle distinctionem. — Specimina hujus plantae sterilia cum colore supra descripto, tum structura strati corticalis, (sub microscopio reticulata), ab omnibus *Laminariae Fasciae* Auctor. facile dignosci possunt.

2. Punctaria latifolia *Grev.*

Thallo olivaceo-flavescente membranaceo oblongo-obovato basin versus mox attenuato.

Punctaria latifolia *Grev. Alg. Brit. p.* 52. — *Harv. Man. p.* 33.

Inter *Punctariam undulatam Zosterae marinae* innascens, in inferiori limite aquae, in portu prope Christiansund Norvegiae. Jul.

Specimina norvegica anglicis multo minora; in illis thallus 3—4-uncialis dimiduamque l. $^2/_3$ unciam latitudine aequans, basin versus non tam longe, ut in priori specie, attenuatus, apice saepe in lacinias fissus. Ceterum nullas invenio notas, quibus, nisi colore et quod in *Zostera* parasitica est, haec species a priori, cum qua tamen conjungere non audeo, vere sit diversa.

### 3. Punctaria undulata *J. Ag.*

Thallo olivaceo subcoriaceo-membranaceo lineari undulato-crispo in basin longe attenuato.

Ulva plantaginifolia *Lyngb. Hydr. p.* 31. *t.* 6. *A. B.*
Punctaria undulata *J. Ag. Nov. p.* 15.

In *Zostera marina* parasitica, a Freto baltico per oram occidentalem Sveciae, v. c. Hallandiae borealis ad Särö, Bahusiae ad Wargö, Hönö, Christineberg, Wäderöarne optimaque ad Koster, Norvegiaeque saltim usque ad Christiansund. Jun. — Sept.

Folia *Zosterae marinae* per longa spatia dense investiens, neque in alia planta a me saltim observata. Thallus in statu juniori unciam saepe solummodo longus latitudineque tunc seta porcina saepe non crassior, hologonidiiferus, cellulis strati corticalis hic et illic in utriculos, granulis repletos, extensis; qui utriculi, a *Kützing* (Phyc. gen. t. 20. II. f. 8) bene depicti, an organa quaedam multiplicationis (siliculis illis *Ectocarpi litoralis* analoga), dicere nequeo. In speciminibus adultis thallus mox 8 pollices longus et semilineam latus, mox 6 pollices longitudine duasque lineas latitudine aequans, nunc subplanus nunc undulato-crispus l. spiraliter tortus, plus minusve nitens.

4. Punctaria caespitosa *J. Ag.*

"Thallo caespitoso tenuissimo subpellucido viridi cuneato lanceolatove margine undulato-plicato in stipitem capillarem attenuato."

Punctaria caespitosa *J. Ag. Nov. p. 14.*

"In sinu Codano rarius, Algis lapillisve affixa."

"Ad Laminariam debilem, ut crediderim, plerumque relata quasi forma ejus borealis et magis contracta judicata fuit. Stipites quam in affinibus magis elongati capillo vix crassiores, eximie caespitosi, mox in frondem cuneatam lanceolatamve, 2—3-pollicarem dilatati" J. Ag. l. c. — Planta plane mihi ignota, cujus specimen vidi nullum.

## XL. ILEA *Fries.*

Thallus submembranaceus, frondosus, simplex, strato interiori cellulis majoribus inaequalibus, et exteriori subrotundo-angulatis minimis formato constructus. Sporocarpia adhuc plane ignota.

Hoc nomine, a Cel. *Fries* in Flora Scanica proposito, plantam, ignota fructificatione, veram affinitatem si respicis, dubiam, sed callo radicali hemisphaerico a *Laminarieis* certe removendam *Dictyoteis*que appropinquandam, "ad interim" proponere audeo. Structura interna a prioris generis parum quidem abhorret, at stratum exterius thalli valde est diversum, ut facile separetur.

1. Ilea fascia *Fl. Dan.*

α. thallo lineari angustissimo in stipitem capillarem brevem longe attenuato.

Ulva Fascia *Fl. Dan. t.* 768 — *Lyngb. Hydr. p.* 28.
Laminaria Fascia *Ag. Syn. p.* 19. — *Alg. Scand. exs. n.* 36. — *Harv. Man. p.* 25. (specimina minora ibi memorata).
Ilea fascia. *Fr. Fl. Scan.*

*b.* thallo lineari-setaceo.

Ulva Fascia *β. Lyngb. l. c.*
(*β.* thallo oblongo l. cuneato basi in stipitem capillarem brevem attenuato.
Laminaria debilis *Ag. Sp.* 1. *p.* 120. — *Harv. Man. p.* 25 *!*
Laminaria Fascia *Harv. p.* 25. (specimina majora).
Laminaria cuneata *Suhr. Fl. Dan.)*

Forma *α.* ad saxa lapidesque mari aperto exposita, paullum supra limitem infimum aquae, a Freto baltico per totam oram occidentalem Sveciae Norvegiaeque saltim usque ad Trondhiem. Jul. — Sept. — *β.* ad oras nostras a me saltim nunquam lecta.

In speciminibus formae *a.* Babusiensibus thallus longitudine usque 6—8-pollicaris, nonnunquam seta porcina vix duplo latior, at plerumque duas usque lineas latus, e quarta longitudinis parte in stipitem brevem sensim attenuatus; in norvegicis contra, a *Cel. Blytt* communicatis, brevior est, tres fere lineas latus, quae itaque specimina quodammodo ad *β.* accedunt. — Singulare, quidem formam *β.* cum *α.* apud nos nunquam esse inventam, cum utraque in Anglia eisdem locis occurant, ut me edocuit Honoratissima *Griffiths*, quae numerosis suis speciminibus utramque minime esse distinctam clare mihi exposuit. — *Laminaria cuneata v. Suhr.*, cujus multa ab ipso auctore communicata specimina coram habeo, cum anglicis *Laminaria debili* atque *L. Fascia* ad unguem convenit, ut sit sane mirandum, cur *Kützing*, illam (*L. cuneatam*) cum *Punctaria latifolia* conjungens, *Laminariam Fasciam* in alio genere aliaque familia collocaverit.

## XLI. ASPEROCOCCUS *Lamour.*

Thallus membranaceus, mesenteriformi-tubulosus, simplex, strato interiori cellulis majoribus rotundatis, et exteriori cellulis minoribus subrectangulis formato constructus. Sporocarpia punctiformia per thallum inordinate sparsa.

### 1. Asperococcus bullosus *Lamour.*

Thallo inflato cylindrico l. elliptico basi rotundato l. abrupte attenuato apiceque obtuso.

Asperococcus bullosus *Lamour. ess. p.* 62. —
Gastridium Opuntia *Lyngb. Hydr. p.* 71. *t.* 18.
Encoelium bullosum *Ag. Sp.* — *J. Ag. Nov. p.* 16.
Asperococcus Turneri *Hook. Engl. Fl.* — *Alg. Scand. exs. n.* 6.

Phyceis tenuioribus insidens in fundo conchifero 1—6-orgyali plus minus intrataeniensi, ab Hallandia boreali per totam oram Bahusiensem, v. c. ad Hönö, Grundsund, Grafvarne, Koster in Segesåta, Norvegicamque saltim usque ad Molde. — Jul. — Sept.

Thallus rarius elliptico-vesicaeformis, plerumque valde elongatus i. e. unciam saepe latus et 8 pollices usque 5 pedes longus, v. c. in Segesåta prope Koster, ubi haec species maxime luxuriat, stipite 1-2 lineas alto capillari. Color viridi- l. flavescenti-olivaceus.

### 2. Asperococcus echinatus *Mert.*

Thallo fistuloso filiformi-lineari basi longe attenuato apiceque subobtuso.

Conferva attenuata *Mert. in Roth. Cat. III. p.* 170.

Scytosiphon fistulosus *Lyngb. Hydr. p.* 66.
Encoelium echinatum *Ag. Sp. p.* 145. — *J. Ag. Nov. p.* 15.

In limite maris, Fucis plerumque adnatus, a Freto baltico per totam oram Sveciae occidentalem, v. c. extra Särö Hallandiae borealis, Christineberg, Koster etc., atque Norvegicam saltim usque ad Christiansund. Jun. — Sept.

Thallus longitudine 6—8-pollicaris, diametro nonnumquam seta parum crassior, at normalis lineam et ultra aequans; nunc sterilis nunc sporocarpiis plus minus explicatis subverrucoso-scaber.

## XLII. STRIARIA *Grev.*

Thallus tubulosus, filiformis, opposite ramosus, strato interiori cellulis majoribus rotundatis, et exteriori minoribus subrectangulis formato constructus. Sporocarpia verticillatim circa thallum coordinata.

### 1. Striaria attenuata *Grev.*

Tab. V. E.

Stilophora lineolata *Ag. Aufzähl.*
Carmichaelia attenuata *Grev. Crypt. Fl.*
Striaria attenuata *Grev. Alg. Brit. p.* 55 *t.* 9. — *Aresch. Linnaea* 1842 *p.* 230. *Kütz. Phyc. gen. p.* 336. *t.* 21. *II.*
Striaria fragilis *J. Ag. Linnaea* 1841 *p.* 5 (forma inflata, sterilis l. hologonidiifera.)
Stictyosiphon adriaticus *Kütz. Phyc. gen. p.* 301. *t.* 21. *III.* (forma hologonidiifera.)

*b.* thallo subcapillari tenuissimo.

Solenia crinita *Ruch.* — *Ag. Syst.*
Striaria crinita *J. Ag. Alg. med. et adr.*

*Polysiphoneis* Phyceisque tenuioribus adnata, in fundo intrataeniensi ostreifero, a Bahusia inferiori per totam Sveciae oram, v. c. in Bondhålet prope Christineberg, in Segesåta prope Koster; in mari norvegico v. c. prope Molde, cum *Ostrea* sine dubitatione longius septentrionem versus evanescens. Majo — Jul.

Thallus junior crinitus, crassitie capillum fere aequans, longitudine denique pedalis et ultra, unam alteramve lineam crassus, coloris subflavescenti-olivacei. Rami ramulique normaliter oppositi l. gemini, sed nonnunquam sparsi, utrinque attenuati. Specimina sterilia l. hologonidiifera quoad omnes partes majora, valde fragilia, ut integra rarius legantur; minora contra sive tenuiora, optime plerumque fructificantia, minus fragilia, emissis sporis in illa transmutantur. De hologonidiis cfr. tab. l. c.

Cum supra, tum in Linnaea l. c., duas hujus plantae formas, alteram scilicet fructiferam, alteram hologonidiiferam adesse indicavi. Inter utramque, structuram thalli si respicis, nulla plane adest differentia. Quae cum ita sint, me ad formam hologonidiiferam retulisse *Stictyosiph. adriaticum* Kütz., quin assiduo observatori par videatur, non dubito; inter utriusque a *Kützing* datas plantae figuras nulla alia adest thalli differentia, quam quod rami in *Stictyosiphone* sunt subverticillati, quod et in *Striaria* non raro observatur. Cum *Stictyosiphonem* Familiae XXIX et *Striariam* Familiae XLIII adscripserit *Kützing*, novum habemus exemplum, quomodo vir ille celeberrimus naturam illustrare conetur. Ita etiam *Dictyota dichotoma* hologonidiifera et fructificans species ab eo habentur distinctae, eidem tamen generi adscriptae. Hoc epocham illam Lichenographiae Acharianam non male revocat.

## XLIII. STILOPHORA *Ag.*

Thallus filiformis, ramosus, strato interiori cellulis elongatis, exteriori cellulis subellipticis formato constructus. Sporocarpia verrucaeformia inordinate per thallum sparsa.

Genus in eo, quod inter *Chordarieas* atque *Dictyoteas* plane ambigit, certe singulare. Speciem l. formam quandam adriaticam, sporocarpiis in stratum corticale sev fructiferum *Chordariae* plane confluentibus, infra memorabo. In *Stilophora paradoxa* sporocarpia circa thallum filiformem fere, ut in *Striaria attenuata*, verticillatim sunt saepe disposita, ut hoc genus in *Chordaricarum* limite atque *Dictyotearum* sit fere positum.

### 1. Stilophora rhizodes *Ag.*

Thallo tenuiori filiformi subaequali, sporocarpiis verrucaeformibus.

Chordaria rhizodes *Ag. Syn. p.* 15. — *Lyngb. Hydr. p.* 52. *t.* 13 *c.*
Sporochnus rhizodes *Ag. Sp.* 1. *p.* 156. *a.*
Stilophora rhizodes *J. Ag. Linnaea* 1841.

Phyceis majoribus adnata, cum in inferiori limite aquae tum in fundo ostreifero, a mari baltico per totam oram Scandinaviae occidentalem saltim usque ad Molde. — Aestate tota.

Thallus longitudine usque 2-pedalis et millemetrum latitudine parum superans, coloris virescenti-olivacei. Sporocarpia propter tenuitatem thalli, quam in sequente specie majora, nunquam in lineas transversales coordinata, sed solitaria, thallum saepe amplectentia. — A *St. paradoxa* notis supra allatis parum quidem differt haec species, at utramque confluentem vidi

nunquam; neque a me in iisdem locis promiscue crescentes observatae fuerunt, neque hanc in sinubus interioribus, ubi sequens copiosissime adest, vidi. Hoc in causa est, cur utramque ut in natura visam, ita et hic proponere voluerim

2. Stilophora paradoxa *Lyngb.*

Thallo crassiori apicem versus attenuato, sporocarpiis punctiformibus.

Chordaria paradoxa *Lyngb. Hydr. p. 53. t. 14. A.*
Sporochnus rhizodes *β. Ag. Sp. 1. p. 157.*
Stilophora Lyngbyei *J. Ag. Linnaea 1841.*

*b.* substerilis, filis paraphysoideis, cellulis subsphaericis constructis, in verticillos distantes circa thallum ordinatis.

Chordaria paradoxa *Lyngb. l. c.* (saltim sec. t. cit. A. f. 2.)

Phyceis, ut prior, increscens, cum in fundo ostreifero pluriorgyali, tum praesertim in vadosis arenosis sinuum interiorum, a mari baltico per totam oram Sveciae Norvegiaeque saltim usque ad Molde et Christiansund, ubique frequentissime. Aestate tota.

Ramificatio et color fere ut in priori, a qua differt thallo 2—3-pedali et, ubi crassissimus est, lineam aequante, fere inflato sporocarpiisque minoribus punctiformibus, mox inordinate per thallum sparsis, mox subverticillatim circa eundem collectis, ut specimina hoc modo a natura comparata a *Striariae attenuatae*, cum quibus saepe leguntur, speciminibus tironi caute sint distinguenda. Forma *b.*, quam in *Fuco vesiculoso*, in limite aquae crescente, inveni, nil aliud offert singulare, quam degenerationem quandam filorum paraphysoideorum paradoxam; illam suo nomine, formae *a.*, cui nil omnino paradoxi inest, minus conveniente, designare par fuisset Lyngbyeo. —

## XLIV. PADINELLA *Aresch.*

Thallus frondosus, plus minus reniformis, matrici adpressus, strato inferiori cellulis majoribus et superiori cellulis minoribus subquadratis concentrice ordinatis formato constructus. Sporocarpia versus basin thalli informia.

Genus forsan a *Zonaria* in Linnaea 1843 p. 259 perperam a me remotum et cum illa, fructificatione olim melius nota, conjungendum hic retinere cogor; differt ascis in thalamia formae indeterminatae maculaeformia coacervatis filisque paraphysoideis nullis.

### 1. Padinella parvula *Grev.*

Zonaria parvula *Grev. Crypt. Fl. t.* 360.
Padina parvula *Grev. Alg. Brit. p.* 65. — *Harv. Man. p.* 31.
Padinella parvula *Aresch. Linnaea* 1843 *p.* 260. *t. IX f.* 1-3.

Planta junior in *Ceramio rubro*, adulta in *Serpulis* et praecipue in *Ostrea eduli*, in fundo 4—6-orgyali conchifero, v. c. in Bahusiensi mari extra Fiskebäckskil, in Segesåta prope Koster etc. Prope Solsvig extra Bergen legit mihique communicavit Am. Koren. — Jun. — Sept.

Thallus nudo oculo nondum conspicuus reniformis, suberectus, basi fibrillas paucas emittens, deinde, licet rarius, longitudine usque pollicaris, formae magis indeterminatae, vario modo lobatus, e margine prolificationes reniformes saepe emittens et matrici pagina inferiori adpressus, coloris olivacei papyraceo-membranaceus. Asci subelliptici l. subobovati, versus basin thalli in maculas pauciores indeterminatae omnino formae atque magnitudinis collecti.

## XLV. RALFSIA *Berk.*

Thallus crustaeformis l. reniformis, matrici plus minus adpressus. Sporocarpia, ascis filisque paraphysoideis articulatis, verrucaeformia per thallum sparsa.

Genus, ut nunc mihi notum, inter *Chordarieas* atque *Dictyoteas* quodammodo ambigit. In *Ralfsia deusta* nempe, sec. *Berkeley* in Engl. Bot. t. 2866, sporocarpia in thallo inter se valde sunt remota, ut in *Dictyoteis;* in *Ralfsia verrucosa* contra (cfr. infra) saepe tam confluunt, ut stratum fere forment ascigerum, ut in *Chordaricis*, quod in causa fuit, cur in Linnaea 1843 utramque speciem generi *Cruoriae* adscripserim. Nomen generis ab Amiciss. *Berkeley* datum eo potius retinendum credo, quod ille primus fructum invenit.

1. Ralfsia deusta. *Ag.*

Thallo orbiculari-reniformi matrici umbilicatim adnato ambituque plus minus libero subtus (exsiccato) albescente-griseo l. concolori supra laevi, sporocarpiis sparsis.

(*a.* thallo suborbiculari simplici plus minus elevato-zonato subtus albescenti-griseo.

Ralfsia deusta *Berkeley in Engl. Bot. t.* 2866.)

*b.* thallo centro umbilicato-substipitato crassiori imbricato subtus concolori.

Zonaria deusta *Ag. Syn. p.* 40. — *Spec.* 1. *p.* 132.

Forma *b.* ad litora Norvegica secundum specimina a Cel. Hoffman-Bang communicata.

Ut jam in Linnaea 1843 p. 267 memoravi, duae hujus speciei adesse videntur formae, *altera* reniformis l. orbicularis,

thallo simplici etc., ad quam referenda videntur specimina gallica, quae vidi, nec non anglica; *altera* thallo subreniformi imbricato etc., ad quam pertinent specimina grönlandica nec non norvegica mihi nota. Ceterum an utraque specifice forsan sit distincta, immo an forma *a.* sit tantum sequens species magis evoluta, cum pauca sola mihi sint specimina, pro certo affirmare non audeo. In omnibus meis speciminibus fructificatio nulla.

2. Ralfsia verrucosa *Aresch.*

Thallo orbiculari l. confluente indeterminato matrici crustaeformiter arcte adnato (exsiccato) subtus ferrugineo supra verrucoso, sporocarpiis sparsis subconfluentibus.

*a.* rupincola, thallo demum in matrice indeterminate effuso.

Zonoria deusta *Lyngb. Hydr. p.* 19. *t.* 5. (saltim pro parte).
Cruoria verrucosa *Aresch. in Linnaea* 1843 *p.* 264 *t. IX f.* 5, 6.

*b.* lignicola, thallo subcrassiori orbiculari centroque demum fatiscente ambitu crescente.

Zonaria Liebmanni *Örsted de Reg. mar. p.* 49.

In molibus ligneis l. ad margines scrobiculorum rupium aqua repletorum per totam oram Scandinaviae, a Freto baltico, v. c. prope Havniam, per oram Bahusiensem, v. c. in Norra Koster, usque in Solsvig extra Bergen Norvegiae (Koren). Anno toto.

In forma *a.* crusta *junior* et solitaria orbicularis, diametro usque pollicaris, arcte rupibus adnata, ¼ lineam circiter crassa, rufescens zonisque paucis plus minus evidentibus lutescenti-olivaceis ornata, sublaevis; *adulta*, pluribus saepe per saxa in strata indeterminatae omnino figurae atque extensionis confluentibus, crassior et e matrice facilius secedens, fusco-purpurascens, verrucosa; *siccata* nigro-fusca, subtus ferruginea. Spo-

rocarpia verrucaeformia plus minus confluentia; fila paraphysoidea clavata, basin versus insigniter attenuata et sub microscopio lutescentia, cellulis superioribus diametro 1 ½ l. 2plo longioribus, inferioribus idem longitudine 2—3plo superantibus; asci nunc subobovati nunc oblongi. — In speciminibus ligno increscentibus thallus magis distincte stratis superimpositis concentricis, centro *Parmeliae centrifugae* more saepe fatiscens ambituque crescens, quod cum reliquis hujus plantae phaenomenis Lichenum naturam in memoriam bene revocat.

In cellulis filorum paraphysoideorum vidi schizogonidia vivaciter se moventia; quamquam vero et talia sub microscopio in aqua emissa vidi, tamen eadem e cellulis fil. paraphysoideorum nunquam egredientia observavi.

*Zonariam deustam* Lyngb. l. c., cum propter descriptionem tum ob observationem *Agardhii* Sp. Alg. 1. p. 133 de speciminibus ei communicatis Lyngbyanis, ad hanc speciem saltim pro parte referre non dubito. Quae vero nomine *Zonariae deustae* Lyngb. mihi communicavit Cel. *Hoffman-Bang* specimina, ea ad *R. deustam* nostram omnino pertinent.

Fam. X. Chordarieae. *Char. ess.* Sporocarpia, ascis filisque paraphysoideis intermixtis constituta, stratum corticale thalli formantia.

Thallus strato inferiori l. centrali, cellulis elongatis confecto, et interdum intermedio — strato exteriori *Dictyotearum* respondente — cellulis rotundatis, et denique corticali seu fructifero filis illis paraphysoideis formato constructus, crustaceus, caespitosus, filiformis. Asci inter fila paraphysoidea strati corticalis reconditi, unispori. Hologonidia rariora, in variis *Chordariae flagelliformis* formis observata. Schizogonidia, motu praedita, in filorum cellulis paraphysoideorum *Mesogloiae* formari *J. Agardh* (Alg. med. et adr.) probabile reddidit.

Quamquum notis supra allatis haec familia bene videatur circumscripta, tamen variae adsunt aberrationes. In *Chordaria tuberculosa* thallus, filis paraphysoideis ascisque nodoso-conglomeratis et inde v. c. *Stilophorae* sporocarpia referentibus, hanc plantam in memoriam revocat. — In *Chorda Filo* asci cum filis paraphysoideis non semper totum cooperiunt thallum, spatia quaedam tantum ejusdem investientes, quo respectu haec planta characterem *Laminariearum* revocat, cum quibus tamen, me judice, minime est conjungenda.

## XLVI. CHORDA *Stackh.*

Thallus subcoriaceus, filiformis, cavus, simplex, strato interiori cellulis majoribus elongatis, et exteriori cellulis rotundato-angulatis formato constructus. Asci inter fila paraphysoidea et cum iis e strato exteriori oriundi.

Stratum exterius seu corticale, ut supra est memoratum, cellulis illis subrotundis, quae v. c. in *Mesogloia vermiculari* inter stratum centrale atque filorum paraphysoideorum adsunt, certe correspondet; in *Chorda* vero, ubi fila paraphysoidea cum sporis saepe desiderantur, firmioris fit structurae et in planta sterili stratum vere corticale. Genus ceterum inter *Chordarieas* retinendum, neque quod fructificatio partem quandam thalli saepe tantum obvestit l. quod fila paraphysoidea in *Chorda filo* unica cellula sunt forsan constructa, inter Laminarieas collocandum.

### 1. Chorda filum *Linn.*

Thallo longissimo chordaeformi continuo, filis paraphysoideis paucioribus, ascis pyriformibus.

Fucus Filum *Linn Sp. ed.* 1. *v.* 2. *p.* 1162. — *Fl. Sv. p.* 432.

Chorda Filum *Lamour. Thal. p.* 27. — *Lyngb. Hydr. p.* 73. *t.* 18. *C. Alg. Scand. exs. n.* 31.
Chordaria Filum *Ag. Syn. p.* 13.
Scytosiphon Filum *Ag. Spec.*

*b. tomentosa:* thallo tomento densissimo et longiori vestito.

Chorda tomentosa *Lyngb. Hydr. p.* 74. *t.* 18. *A.*

Lapillis, Fucis conchisque adnata in fundo ulnari l. usque 4-orgyali in sinubus interioribus, a taeniis Ostrogothiae maris orientalis per oras omnes Sveciae Norvegiaeque usque in Finmarkiam; omnium fere Phycearum vulgatissima; *b.* saxis adnata in inferiori aquae limite, undis vehementioribus expositis, v. c. ad Arendal Norvegiae (Lyngbye), ad Blåbärsholmen prope Fiskebäckskil Bahusiae etc. passim. — Maj. — Sept.

Thallus non raro 10-pedalis, utrinque attenuatus at crassitie vix 1 ½ lineam superans, plerumque flavescenti-olivaceus, tomentoque, filis confervoideis simplicibus, ut in *Chordaria flagelliformi* normali, constituto plus minus denso obsessus. Fructificatio medium thallum praesertim occupat; quantum equidem observavi: asci pyriformes inter fila paraphysoidea, unica cellula constructa, ascisque 2-plo breviora. — Var. *b.*, propter tomentum thalli densius, loco natali et vi undarum forsan, ut alia docent exempla, adscribendum, minime distincta habenda est species. Denique formae hujus speciei minores, v. c. *Chorda filum* var. *thrix* atque steriles, a formis sequentis speciei a me saltim non semper tute dignosci possunt. — Ridicula semper, sive fructificent sive steriles sint, omnes Phycearum formas specifice determinandi contentio. Inde omnes illae falsae species, quibus nunc abundat Phycologia et Lichenographia antea. Quis *Carices* sine fructu et floribus determinare vult? Qui vellet, caudam traheret.

2. Chorda lomentaria *Lyngb.*

Thallo breviori articulato-constricto, filis paraphysoideis

confervoideis frequentioribus ascos subovatos longitudine subexcedentibus.

Chorda Lomentaria *Lyngb. Hydr. p. 74. t. 18. E.*
Scytosiphon Filum *γ* lomentarius *Ag. Spec.* 257.

*b.* thallo capillari-filiformi longiori subviridi-olivaceo vix articulato-constricto.

*c.* thallo filiformi breviori castaneo aequali.

Asperococcus castaneus *Carm, Hook. Engl. Fl.* 2.

Rupibus adnata in superiori aquae limite, a Freto baltico per totam oram Scandinaviae occidentalem saltim usque ad Salten Nordlandiae (Sommerfeldt); *b.* prope Blåbärsholmen extra Fiskebäckskil; *c.* prope Koster, nec non ad Molde Norvegiae. Maj — Sept.

Forma normalis atque fructificans: thallus coloris fusco-olivacei apicem versus parum attenuatus, longitudine usque 12-pollicaris, lineam circiter crassus, insigniter articulato-constrictus, internodiis 6 lineas immo pollicem longis. Fila paraphysoidea copiosa, densissima, ascos subovatos l. ellipticos longitudine aequantia l. paululum longiora. Forma *b.* saepe 6—8-pollicaris; *c.* vero unciam tantum longa; in utraque fila paraphysoidea atque asci sunt ignota et stratum corticale insigniter firmum et compactum.

## XLVII. CHORDARIA *Ag.*

Thallus gelatinoso-coriaceus, filiformis, farctus, ramosus, strato interiori cellulis elongatis et exteriori filis paraphysoideis formato constructus. Asci subovati inter fila paraphysoidea et cum iis e strato interiori oriundi.

### 1. Chordaria flagelliformis *Fl. Dan.*

Thallo aequali laevi undique ramoso, ramis subsimplicibus elongatis, filis paraphysoideis subclavatis.

Fucus flagelliformis *Fl. Dan. t.* 650. (Lyngb.)
Chordaria flagelliformis *Ag. Syn. p.* 12. — *Lyngb. Hydr. p.* 51. *t.* 13. *B.* — *Alg. Scand. exs. n.* 33.

Rupibus Phyceisque adnata in inferiori aquae limite undisque vehementissimis plerumque exposita, a litoribus orientalibus Sueciae, v. c. Blekingiae Scaniaeque, per totam oram Scandinaviae occidentalem, saltim usque ad Tromsoe Finmarkiae (Blytt), frequentissime. Aestate tota.

Thallus plerumque pennam passerinam, immo nonnunquam corvinam, crassitie excedens, longitudine usque 2-pedalis, primarius ramis elongatis aequalibus simplicibus, l. rarius uno alterove ramo secundi ordinis obsessis, l. furcatis; quo crassior eo etiam brevior, nunc filis tenuissimis confervoideis densissimis obsessus, nunc talibus omnino carens.

2. Chordaria tuberculosa. *Fl. Dan.*

Thallo attenuato verrucoso-tuberculato repetite ramoso, ramis ramulisque subdivaricatis, filis paraphysoideis subclavatis.

Ceramium tuberculosum *Fl. Dan. t.* 1546. (sec. Lyngb.)
Chordaria tuberculosa *Lyngb. Hydr. p.* 52. — *Örsted de Reg. marinis p.* 50.
Chordaria nodulosa. *Ag. Sp. et Syst.*

Ad munimentum Trekronor extra Hauniam legit *Örsted.* Cum vix dubitari possit, quin ad litora Scaniae Hallandiaeque crescat haec planta, quamquam a me nunquam est lecta, tamen eandem hic omittere nolui. A sequente specie, cui maxime affinis est, differt thallo verrucoso-tuberculato eoque praesertim quod fila paraphysoidea iis in *Chordaria flagelliformi* sunt simillima, neque, ut in sequente, in cellulam majorem sphaericam desinentia. — Cfr. Aresch. in Linnaea 1843. p. 226.

### 3. Chordaria divaricata *Ag.*

Thallo attenuato laevi undique repetite ramoso, ramis ramulisque subdivaricatis, filis paraphysoideis apice in cellulam majorem sphaericam desinentibus. Tab. IX A.

Chordaria divaricata *Ag. Syn. p.* 12. — *Alg. Scand. exs. n.* 66. *Aresch.* in *Linnaea* 1843. *p.* 226.

In partibus sinuum interioribus, paululum infra limitem aquae inferiorem, junior *Zosterae marinae* l. Phyceis tenuioribus, insidens, adulta demergitur et in fundo 1-2-orgyali excrescere pergit, per oram Sveciae occidentalem ex. gr. prope Wargö extra Gothoburgum et ad Christineberg Bahusiae v. c. in Långegap et in Bondhålet. Jul. — Sept.

Habitus fere *Mesogloiae* cujusdam, quare etiam a *Kützing* huic generi adscripta, quamquam ad *Chordariam* potius pertinere videtur. Thallus junior juniori *Stilophorae paradoxae* l. validiori *Dictyosiphonis foeniculacei* non dissimilis, olivaceus; adultus obscure olivaceus, immo nigrescens, semilineam saepe crassus, unum alterumve pedem longus, nunc omnino integer, ramis ramulisque plus minus implicatis, nunc omnibus ramulis destitutus. Cellula extima filorum paraphysoideorum ceteris longe major, sphaerica intusque flava. Asci ut in *Chordaria flagelliformi.*

## Appendix Chordariae flagelliformis:

### DICTYOSIPHON *Grev.*

Thallus capillaris l. filiformis, simplex l. ramosus, e strato interiori cellulis elongatis, et exteriori cellulis rotundatis formato constructus. Hologonidia in thallo sparsa.

E charactere dato facile patet et *Striariam attenuatam* hologonidiiferam, cum formam cellularum non respicimus, ad hoc

genus pertinere. Ex quo conjicere forsan liceret, plantas, quas in hoc genere comprehendo, esse *Dictyoteas* hologonidiiferas, i. e. ex. gr. *Striariae attenuatae* l. *Dictyotae dichotomae* hologonidiiferis analogas, quod et ipse putarem, nisi *Dictyosiphon. foeniculaceum* α. esse formam *Chordariae flagelliformis*, mihi persuasum haberem; a qua forma cum nullo charactere generico distinguere potuerim *Asperococcum pusillum* Carm., utramque plantam, adjecta nova, eodem loco tractare volo.

### 1. Dictyosiphon foeniculaceus *Huds.*

Thallo filiformi-capillari repetite ramoso, ramis ramulisque plus minus crebris obsesso.

α. thallo heteromorpho, i. e. parte inferiori l. uno alterove ramo ejusdem ac *Chordariae flagelliformis* figurae atque structurae, i. e. filis paraphysoideis sporisque ornato, reliqua vero thalli parte structurae atque figurae supra descriptae *Dictyosiphonis* (i. e., ut plerique putant, *Dictyosiphon foeniculaceus* in Chordaria flagelliformi parasiticus).

*a.* ramis plus minus in structuram *Chordariae flag.* mutatis, ramulis heteromorphis 3-4 lineas longis patentibus densissime approximatis subsimplicibus. Tab. VI. B.

*b.* ramis superioribus structurae *Dictyosiphonis*, ramulis elongatis patentibus magis remotis ramulisque sparsis brevibus obsessis.

Chordaria flagelliformis β. et γ. *Ag. Syn. p.* 13.

* glabra.

** villo densissimo obsessa. Tab. VIII. A.

Scytosiphon tomentosus. *Lyngb. Hydr. p.* 62.

*c.* ramis superioribus structurae *Dictyosiphonis*, ramulis elongatis divaricatis squarrosis magis remotis ramentisque paucioribus obsessis. Tab. VI. A.

Scytosiphon hippuroides *Lyngb. Hydr. p.* 63. *t.* 14. *B.* (saltim pro parte huc pertinens).

In inferiori aquae limite ad rupes undis vehementioribus expositas, per omnia litora Scandinaviae, ubi adest *Chordaria flagelliformis*, usque in Tromsoe Finmarkiae. Tota saltim aestate.

Quin hic *Dictyosiphon foeniculaceus* sit forma hologonidiifera *Chordariae flagelliformis*, equidem haud dubito. Formam *a.* si figuram datam inspicientes examinamus, adest in thallo primario, Tab. VI. B. prope *a.*, structura plane *Dictyosiphonis*, cum contra prope *b.* ejusdem figurae invenitur omnino structura *Chordariae flagelliformis*. Quomodo possibile hic duas diversas, alteram in altera parasiticam, plantas videre? Idem et ostendit forma *c.*, Tab. VI. A., in qua ad *b.* (cfr. fig) inveni structuram *Chordariae flagelliformis*, ad *a.* vero structuram *Dictyosiphonis*. — Ceterum inter formas supra allatas *a. b. c.* in natura nulli plane adsunt limites, tam enim confluunt, ut in eodem saepe adsint individuo; synonymiae causa a me seorsim propositae, omnesque mihi saltim luce clarius formae *Chordariae flagelliformis* hologonidiiferae.

*β.* thallo structura isomorpho tenuiori capillari-filiformi ramosissimo, ramulis attenuatis ramellis brevibus plus minus crebris obsessis. Tab. VII.

Conferva foeniculacea *Huds.*

Scytosiphon foeniculaceus *Fl. Dan.* — *Lyngb. Hydr. p.* 63. *t.* 14. *C.* — *Ag. Sp. et Syst.*

Dictyosiphon foeniculaceus *Grev. Alg. Brit.* — *Alg. Scand. exs. n.* 5.

*b.* thallo capillari, ramulis tenuissimis elongatis subsimplicibus. Tab. V. F.

In *Fuco vesiculoso* l. *Chorda Filo* parasiticus, a litoribus Blekingiae Scaniaeque per totam oram Scandinaviae occidentalem usque ad Tromsoe Finmarkiae, minime infrequens. Aestate tota.

A forma priori vix differt nisi thallo tenuiori atque longiori, saepe 2—3-pedali, absentiaque omnis structurae *Chordariae flagelliformis*. Ceterum structura in utraque forma plane eadem, nam formae cellularum in uno eodemque specimine saepe magis dissimiles quam in specimimibus utriusque formae. — In *b.*, fundo ostreifero plerumque obvia, rami ramulique saepe transversim striati (cfr. Lyngb. l. c. f. 3), quae striae e connectionibus cellularum elongatarum atque longitudine aequalium strati interioris oriuntur. Hologonidia haud rara; cfr. Tab. V. f. 2. — —

2. Dictyosiphon pusillus *Carm.*

Thallo caespitoso simplici subcapillari — Tab. VI. C.

Asperococcus pusillus *Carm.* — *Hook. Engl. Fl.* 2. *p.* 277. *J. Ag. Nov. p.* 15. — *Harv. Man. p.* 55.

In *Chorda Filo* parasiticus ad oram occidentalem Sveciae rarior, v. c ad Särö Hallandiae, Svansund, Kärringön atque Lysekil Bahusiae. Aug. — Sept.

Per longa spatia *Chordam Filum* plus minus dense investiens. Thallus flavescenti-olivaceus, longitudine unc ialis l. paululum supra, crassitieque filum tenuius aequans, omnino simplex, nunc glaber, nunc filis tenuissimis confervoideis obsessus, saepe, ut affert *Harvey*, transversim striatus, quae striae e connectionibus cellularum strati interioris oriuntur, stratum exterius translucentes, omnino ut in *Dictyosiph. foeniculac.* supra. Hologonidia satis frequentia (cfr. Tab. cit. 2—3). Cum hanc propter convenientiam, tum ob specimina *Dictyosiphonis foeniculac.*

quae vidi, simplicia vixque nisi magnitudine majori a *D. pusilio* destinguenda et ab variis auctoribus pro vera specie (ex. gr. *Dictyosiph. simplex v. Suhr*) habita, vix dubitare possum, quin sit *Asperococcus pusillus* eadem planta in prima infantia.

### 3. Dictyosiphon chordaria *Aresch.*

Thallo filiformi ramoso, ramis elongatis simplicibus l. uno alterove ramulo instructis. Tab. VIII. B.

In inferiori limite aquae ad Christineberg Bahusiae, palis molibusque ligneis adnata. Jul.

Thallus coloris flavescenti-olivacei, longitudine usque 4—5-pollicaris, primarius undique ramis elongatis simplicibus, rarius ramulosis, 3—4-pollicaribus, nunc omnibus crassitie tenuioris *Chordariae flagelliformis*, nunc variis interpositis capillari-filiformibus. Ramificatio omnino illius, at structura plane *Dictyosiphonis foeniculacei*. — Hologonidia non rara; cfr. fig. 3—4 t. c.

## LXVIII. MESOGLOIA *Ag.*

Thallus gelatinosus, filiformis, normaliter farctus, strato interiori cellulis elongatis et in fila longitudinalia conjunctis, et exteriori filis paraphysoideis formato constructus. Asci subelliptici inter fila paraphysoidea et cum iis e cellulis periphericis rotundatis strati interioris oriundi.

*Mesogloia* a *Chordaria* vix ulla nota generica certa atque definita limitari potest. Quod in *Mesogloia vermiculari* fila strati interioris in peripheria thalli se ramificant, in apicibus ramorum fila paraphysoidea gerentia atque ascos, eo forsan minoris est momenti, quod jam in *Mesogloia Zosterae* haec rami-

ficatio obliteratur ita, ut fila paraphysoidea cum ascis filis cellularum strati interioris immediate fere sint imposita. Cum *Mesogloia Zosterae* habeatur a *Kützing* varietas *M. vermicularis*, quanti momenti sit haec differentia, judicatu mihi videtur perfacile.

1. Mesogloia vermicularis *Ag.*

Thallo crassiori insigniter lubrico ramoso, ramis ramulisque utrinque attenuatis.

Mesogloia vermicularis *Ag. Syn. p.* 125. — *Lyngb. Hydr. p.* 190 *t.* 65 *B.* (mala) — *Alg. Scand. exs. n.* 68.

In inferiori limite aquae sinuum interiorum, l. in fundo ostreifero 2—6-orgyali, a Kullaberg Scaniae per totam oram Sveciae Norvegiaeque occidentalem saltim usque ad Molde et Christiansund, frequenter. Ad litora Nordlandiae sec. *Agardh.* Jul. — Sept.

Specimina tenuiora, optime saepe fructificantia, cautissime a sequentibus speciebus distinguenda; inest in iisdem semper aliquid crassioris atque obesioris. Thallus explicatus brunneo-olivaceus, longitudine usque 2-pedalis, duas lineas saepe crassus, ramis ramulisque et basi attenuatis. Fila strati interioris in peripheria magis ramosa atque explicata quam in ceteris speciebus. Fila paraphysoidea subclavata, cellulis diametrum longitudine subaequantibus, moniliformia. Asci modo elliptici modo obovati, ejecta spora, diu persistentes. — In iisdem locis cum *M. virescente* nunquam mihi obvia.

2. Mesogloia virescens *Carm.*

Thallo tenuiori ramoso, ramis ramulisque patentibus aequalibus.

Mesogloia virescens *Carm.* — *Berkeley Gleanings of British Alg. p. 44 t. 17 f. 2.* (ad quam et pertinere videntur. M. affinis *t. 16 f. 2 et* M. gracilis *t. 17. f. 1.*)
Mesogloia Hornemanni *v. Suhr.* — *Kütz. Phyc. gen.*

In fundo ostreifero 4—7-orgyali, v. c. in Segesâta prope Koster et in mari norvegico prope Molde (Ipse) et Alstenoe (Blytt). Jul Aug.

Specimina Bahusiensia cum anglicis, ab Honoratissima *Griffiths* benevole communicatis, in omnibus fere conveniunt. Thallus explicatus longitudine palmaris et ultra, at vix dimiduam lineam crassus, ramis et praesertim ramulis basi attenuatis. Fila paraphysoidea basi vix attenuata, cellulis subcylindraceis diametro 2-plo fere longioribus; his notis specimina Bahusiensia ab anglicis, in quibus fila paraphysoidea, ut in *M. vermiculari*, sunt constructa, differunt, quam ob rem in eo nulla essentialis differentia. Ascos, nunc obovatos nunc ellipticos, semel vidi oblongos, acutos granulisque densissime farctos, fere ut in *Liebmannia* J. Ag., quam depinxit *Kützing* Phyc. gen. t. 27. I. f. 2.

### 3. Mesogloia Zosterae *Lyngb.*

Thallo tenniori parcius ramoso, ramis ramulis brevibus subspinaeformibus divaricatis aequalibus obsessis.

Linckia Zosterae *Lyngb. Hydr. p.* 194. *t.* 66. *C.*
Aegira Zosterae *Fries Syst. Orb. Veg.* — *Fl. Scan. p.* 325.
Myriocladia Zosterae *J. Ag. Linnaea* 1841. *p.* 49.
Mesogloia Zosterae *Aresch. Alg. Scand. exs. n.* 67. *Linnaea* 1842 *p.* 228 *t. VIII. f.* 1. *et* 1. *b.*

*Zosterae marinae* insidens, a Freto baltico per oram occidentalem Sveciae v. c. in Smalsund prope Christineberg et in portu prope Wäderöarne Bahusiae, atque Norvegicam saltim usque ad Molde et Christiansund. Jun.—Sept.

In *Zosterae* foliis plerumque caespitosa varioque modo intricata Thallus coloris fere prioris speciei, longitudine plerumque 2- 3-, rarissime 5-pollicaris, ejus tenuior; rami pauci et sparsi, at ramuli subspinaeformes, lineam circiter plerumque longi, numerosiores. Ceterum omnibus, v. c. aseis, qui in speciminibus explicatis frequenter adsunt, cum priori conveniens, ut illius forma, loco exorta, facile haberi possit. Apud nos tamen, sine transitu ad priorem obvia, si non specifice esset distinguenda, cum *M. virescente*, neque, ut apud *Kützing* l. c., cum *M. vermiculari* conjungi deberet.

Myriocladia Lovenii J. Ag. Linnaea 1841. p. 48, cum mihi ignota sit planta, tum generis tum speciei diagnosin hic adjungere a re haud alienum puto.

Myriocladia. *J. Ag.*

"Frons filiformis ramosa diorgana, filo primario tubuloso continuo, secundariis inferne articulatis superne moniliformiter contractis undique vestito. Sporidia (?) ad apices ramorum ramellis insidentia, filis involucrantibus stipata, ellipsoidea, intra sacculum hyalinum granulosam materiem continentia."

Myriocladia Lovenii *J. Ag.*

"Fronde subvage ramosa, filis secundariis diametrum primarii longe supereminentibus simplicibus l. parce furcatis articulatis, articulis inferioribus elongatis cylindraceis, superioribus moniliformibus ellipsoideis diametro duplo longioribus."

"Hab. in sinu Codano rarissime; specimina in Ostrea crescentia extra taenias Sälö Bahusiae, profunditate 5- 6 orgyarum, protraxi."

"Frondes e basi callosa minima solitariae l. paucae, tripollicares, penna passerina tenuiores, filiformes, ramis conformibus sparse obsitae, flaccidae, subgelatinosae, lutescenti-olivaceae, diorganae. Filum primarium frondem percurrens, tubulosum, continuum; cellulis rectangularibus diametro subtriplo longioribus contextum, apice ramosum in ramulos nonnullos articulatos divisum. Fila secundaria e primario undique egredientia, inferiora plerumque simplicia, superiora furcata elongata patentia

et plerumque incurva, basi laxe articulata sev subcontinua globulis subarticulatim dispositis repleta, apice moniliformiter articulata, articulis ellipsoideis diametro 2-plo longioribus. Ramuli terminales articulati, ramellos fructiferos suboppositos ad geniculum fere quodque emittentes. *Sporidia* (? an conceptacula sporidiorum?) magna et granulosa materia repleta, brevissime pedicellata, filis secundariis involucrata."

"Planta certe sui generis, immo cum Thorea et Lemania forsan tribum peculiarem constituens, Mesogloiis proximam at filo centrali tubuloso distinctam." J. Ag. l. c. p. 48 et 49.

## XLIX. LEATHESIA *Gray.*

Thallus carnoso-cartilagineus, vesiculaeformis, cavus, strato interiori filis, cellulis majoribus compositis, anastomosantibus, et exteriori filis paraphysoideis verticalibus formato constructus. Asci subobovati inter fila paraphysoidea et cum iis e strato interiori oriundi.

### 1. Leathesia difformis *Linn.*

Thallo olivaceo adnato undulato-inflato. Tab. IX. B.

Tremella difformis *Linn. Sv. p.* 429. Cfr. *Fr. Sc. p.* 316.
Chaetophora marina *Lyngb. Hydr. p.* 193. *t.* 66. *A*(mala)
Corynephora marina *Ag. Syst. p.* 24. — *Alg. Scand. exs. n.* 22.

In rupibus l. rarius in Phyceis parasitica, paululum infra infimum aquae limitem, nunc in vicinia aperti maris, nunc locis magis tranquillis, per totam oram Scandinaviae occidentalem saltim usque ad Bergen, frequenter. — Jun. — Sept.

Thallus nunc semine Cannabidis vix major, nunc 2-3 uncias diametro aequans, plus minus undulato-inflatus, modo matrice v. c. Phyceis tenuioribus perforatus, modo, dum in rupibus crescit, umbilicatim adnatus. Cellulae strati interioris non raro in capillos tenuissimos attenuatos inarticulatos (setis in Bulbochaete simillimos) et fila paraphysoidea longitudine

multoties excedentes explicantur. Specimina illa parva, quae in *Gigartina plicata* tam saepe crescunt, primitus sunt solida, ut specimina juniora plurium Phyccarum thallo cavo denique instructarum. Talia hujus speciei specimina non solum propriam speciem, sed etiam genus (*Corynophlaea baltica* Phyc. gen.) habet *Kützing*.

## L. ELACHISTA *Duby* ex ref. *Fr.*

Thallus caespitosus l. caespitoso-stratiformis, strato inferiori cellulis oblongis formato, et filis cellularibus ex eo erectis duplicis generis, brevioribus paraphysoideis atque longioribus, utrisque inter se liberis, constructus. Asci subelliptici ad filorum basin e strato inferiori oriundi.

Licet fila paraphysoidea, ut in Linnaea 1842 annotavi, in *Elachista velutina* a me saltim non sint observata, tamen haec fila, quae in charactere generico respiciantur, digna esse non dubito; haec optimam praebent notam, qua hoc genus a sequente distinguitur. Forsan haec fila in illa specie normaliter adsunt, l. haec ad aliud genus — quamquam non ad *Sphacelariam* — melius est referenda.

### 1. Elachista fucicola *Velley.*

Major, filis majoribus stratum per matricem effusum l. caespites solitarios penicilliformes formantibus, cellulis longitudine diametrum aequantibus l. eodem 2-plo longioribus, ascis oblongo-obovatis. Tab. IX C.

Conferva fucicola *Velley et Auctor. Lyngb. Hydr. p.* 146. *t.* 50. *B.* — *Ag. Syst. p.* 103. — *Alg. Scand. exs. n.* 15.

Conferva ferruginea *Roth*, Conf. fucorum *Roth et* Conf. flaccida *Lyngb. Hydr. p.* 146. *t.* 50. *A.* — *Ag. Syst. p.* 102.

Elachista fucicola *Fr. Fl. Scan. p.* 317. — *Aresch. Linnaea* 1842. *p.* 235. *t. VIII f.* 6 - 7.

*Fucis* adnata in limite aquae ab oris Roslagiae per litora omnia Scandinaviae meridionalia atque occidentalia usque in extrema Finmarkiae, ubique frequenter. Aestate tota.

Thallus plus quam semiunciam altus, nunc caespites solitarios, nunc pluribus confluentibus, stratum per matricem panniformiter effusum formans, modo olivaceus modo flavescens. Species ab auctoribus distinctas supraque ut synonyma allatas, ne formas quidem insigniores habere possum. Longitudo enim cellularum cum diametro illarum collata, parum, ut jam multis locis est observatum, ad notas specificas eruendas sufficit; neque color ullas praebet notas stabiliores, in speciminibus in *Fuco serrato* crescentibus plerumque obscure-violaceus, in iis vero, quae in *Fuco vesiculoso* parasitant, flavescens, quem vero colorem et in illis vidi nonnunquam. — Denique forsan adnotare juvat, si quis hanc speciem degenerationem quandam fructificationis *Fuci* habere vellet, me eandem non solum in speciminibus *Dumontiae ramentaceae* sed etiam in rupe crescentem invenisse.

*Elachista globosa* Örsted de Reg. marinis (Tab. nostra IX D.) nil aliud mihi videtur quam hujus speciei stratum inferius, haemisphaericum et fructificans, filis majoribus nondum explicatis (in speciminibus minoribus) l. paululum supra stratum defractis (in speciminibus majoribus). An status *Elachistae fucicolae* hyemalis? Structura in utraque plane eadem.

2. Elachista stellaris *Aresch.*

Minor, filis majoribus caespitem subsphaericum stellulaeformem formantibus, cellulis inferioribus diametrum longitudine subaequantibus, superioribus eodem 2-5-plo longioribus, ascis ablongo-obovatis. Tab. IX E.

Elachista stellaris *Aresch. Alg. Scand. exs. n.* 71 — *Linnaea* 1842. *p.* 253. *t. VIII f.* 2-3.

*Polysiphoniae elongatae* nec non *Desmarestiae viridi* insidens, in fundo 5-6-orgyali subextrataeniensi maris Bahusiensis haud rara, v. c. extra Fiskebäckskil prope Långö, Koster in Segesåta etc. Jul. — Aug.

Caespes diametro lineam plerumque rariusve duas aequans, Phyceis tenuioribus increscens subsphaericus. Fila thalli majora basi cellulis diametrum longitudine aequantibus l. brevioribus, apicem versus cellulis diametro usque 4-plo longioribus constructus; hac nota ab *El. stellulata* Griff. (Aresch. Linnaea 1843 p. 261. t. IX f. 4) facile differt.

## LI. CRUORIA *Fr.*

Thallus crustaeformis, suborbicularis, stratu inferiori validiori, et filis ex eo erectis cellularibus in crustam dense compactis constructus. "Asci obovato-clavati ad basin filorum" (e strato inferiori oriundi?).

Primus hoc genus, typo *Chaetophorae pellitae* Lyngb., in Flora Scanica proposuit Cel. *Fries;* in Linnaea 1843 idem fusius illustrare ipse conatus sum, haud sane bene, cum et *Zonariam verrucosam*, speciminibus male fructificantibus deceptus, eidem adjunxerim. Fructificationem *Cruoriae* nunquam ipse vidi, at descriptio ejusdem a *Charmichael* est data (cfr Hook. British Flora; Harv. Man.); plantam itaque, quoad locum in systemate mihi saltim dubiam, propter thallum prope *Myrionema* colloco. In *Annales des Sciences naturelles* 1844 *tom.* 2 *t.* 11. *f.* 6-10. fratres *Crouan* nomine *Peyssonellia Dubyei* delineaverunt Phyceam, quae, quatenus e descriptione atque figuris judicare possim, huic generi quam *Peyssonelliae* propior videtur; asci in illa tetraspori; an ita et in nostra *Cruoria?*

1. Cruoria pellita *Lyngb.*

Thallo concolori purpureo-carneo matrici arcte adnato, filis plus minus ramosis apice paululum attenuatis, cellulis diametrum aequantibus l. eodem 2-plo longioribus.

Chaetophora pellita *Lyngb. Hydr. p.* 139. *t.* 66. *B. Ag. Syst. p.* 28.
Cruoria pellita *Fr. Scan. p.* 317. *Aresch. Linnaea* 1843. *p.* 267. *t. IX f.* 7-8.

In lapidibus stipiteque *Laminariae digitatae*, optima in fundo pluriorgyali, per totam oram Scandinaviae occidentalem saltim ab Hallandia usque in Norvegiam meridionalem. Aestate tota.

Crusta diametro interdum 2-pollicaris, coloris purpureo-carnei substantiaeque carnoso-cartilagineae, vix ¼ lineam crassa. Filorum simplicium l. ramosorum cellulae inferiores granulis (an schizogonidiis?) in medio repletae. — *Chaetophoram pellitam* Lyngb. veram nostram esse plantam, neque *Erythroclathrum pellitum* Liebm., luce clarius est, ut jam supra demonstravimus.

## LII. MYRIONEMA *Grev.*

Thallus punctiformis, strato inferiori tenuissimo, et filis ex eo erectis cellularibus subclavatis condensatis (filis paraphysoideis) constructus. Asci subelliptici ad filorum basin e strato inferiori oriundi.

Genus inter Fucaceas infimum, Episporearum fructificationem (si nempe fila illa in charactere memorata cum filis paraphysoideis ex. gr. in *Stilophora* conferimus) i. e. sporocarpium punctiforme referens, ideoque omni jure in grege ultimum; cum priori in multis certe congruit, attamen, ut mihi videtur, distinctum est strati inferioris tenuitate et filorum *Elachistae* majorum absentia.

1. Myrionema punctiforme *Lyngb.*

Plana, filis cellularibus clavatis cellulis longitudine diame-

trum aequantibus, ascis sessilibus.

Linkia punctiformis *Lyngb. Hydr. p.* 195. *t.* 96. *E.*
Myrionema punctiforme. *Fr. Scan.* 317.

In *Ceramio rubro* parasitica, in fundo ostreifero, ex. gr. in Segesâta prope Koster Bahusiae. Jul. — Aug.

Puncta brunnea format in matrice, semilineam diametro vix aequantia, filis basin versus attenuatis a ceteris speciebus facile distincta.

---

## Explicatio Tabularum.

Tab. I. *Halicoccus nodosus β furcatus.*

Tab. II. A. f. 1. asci atque fila paraphysoidea *Fuci vesiculosi*, *a.* ascus, *b.* nucleus, qui in asco *c.* magis evolutus jam in partes est divisus, quarum unaqueque denique, membrana cellulari circumdata, spora fit; f. 2 spora; f. 3 fila paraphysoidea speciminis hologonidiiferi, *a.* perihologonidia, *b.* hologonidia ex iis emissa. — B. *Fucus ceranoides.* — C. f. 1. fila paraphysoidea cum asco (*a*) atque perihologonidiis (*b*); f. 2 *a.* ascus, in quo divisione duae existunt sporae, *b.* sporae illae magis evolutae, granulis naturae ignotae extus (cfr. f. 1) obsessae.

Tab. III. A. *Phyllophora Brodiaei β.* — B. *Rhodomenia Palmetta* — C. *Rhodomenia bifida* — D. *Rhodomenia ciliata.*

Tab. IV. A. *Furcellaria lumbricalis*: f. 1. sectio transversalis receptaculorum (apicum intumescentium), *a.* cellulae intumescentes strati intermedii, ab Ag capsulæ nominatae; f. 2 sporocarpium sporas roseas continens; f. 3 *a-h* peritetragonidia in diverso evolutionis stadiis, intra stratum corticale (b) f. 1 horizontaliter locata; f. 4 spora. — B. *Helminthora multifida*: f. 1 sporocarpium (*a*) cum filis strati corticalis; f. 2 sporae; f. 3 fila strati corticalis magis amplificata. — C *Gloiosiphonia capillaris*: f. 1 sporocarpia; f. 2 sporae; f. 3 fila strati corticalis. — D. *Ceramium tenuissimum*: f. 1 peritetragonidium (*a*), in quo nulceus indivisus; f. 2 in unoquoque peritetragonidio duae (*a. a.*) exstiterunt cellulae, in quarum unaquaque (f. 3) tria denique videntur tetragonidia (*a. a.*, quarto ab illis recondito. — E. *Callithamnion Plumula*: f. 1 particula speciminis sporocarpia (*a. a. a.*) gerentis; f. 2 idem speciminis tetragonidiiferi, *a. b. c.* peritetragonidia tetragoni-

diis cruciatim secedentibus repleta — F. *Callithamnion Hookeri*: f. 1. *a. a. a. a* sporocarpia; f. 2 peritetragonidia, tetragonidiis triangulatim secedentibus farcta. — G. *Callithamnion seirospermum*: f. 1. sporae in cellulis formatae seriatae; f. 2, 3, 4 peritetragonidia, tetragonidiis, ut ex f. 2, 3 linea transversali notatis conjicere liceret, tetragonidiis cruciatim secedentibus.

Tab. V. A. *Callithamnion corymbosum*: f. 1 *a. a.* sporocarpia; f. 2 *a. b. c. d.* peritetragonidia, tetragonidiis triangulatim secedentibus farcta. — B. *Callithamnion byssoides*: f. 1. specimen fructiferum magn nat.: f. 2-3 sporocarpia; f. 4 *a. b.* peritetragonidia, tetragonidiis triangulatim secedentibus. — C. *Spermothamnion Turneri*: f. 1. specim. fructiferum; f. 2 specimen peritetragonidia gerens. — D. *Treutepohlia Daviesii*: f. 1. specim. magn. nat.; f. 2 pars ejusdem amplificata magis, fructifera. — E. *Striaria attenuata*: *a. a* perihologonidia, *b. b. b.* cellulae strati exterioris, *c. c. c.* cellulae strati inferioris. — F. *Dictyosiphon foeniculaceus β. b.*: f. 1. plant. magn. nat., f. 2 *a. a.* perihologonidia; *b. b.* cellulae strati exterioris, *c. c. c.* cellulae strati interioris.

Tab. VI. A. *Dictyosiphon foeniculaceus a. c*: in ramis *a. a.* ubique illius plantae structura, in ramis vero *b. b.* semper structura *Chordariae flagelliformis*. — B. *D. foeniculaceus α a*; in thallo primario prope *a. a. a.* structura est omnino illius plantae, prope *b b. b.* vero structura plane *Chordariae flagelliformis* — C. *Dictyosiphon pusillus*: f. 1. ea planta in *Chorda filo* parasitica; f. 2 particula thalli minus amplificata, hologonidiifera; f. 3 eadem magis amplificata, ut perihologonidia (*a. a*) luculentius appareant, *b.* perihologonidium remotum.

Tab. VII. *Dictyosiphon foeniculaceus β.*

Tab. VIII A. *Dictyosiphon foeniculaceus a. b***: f. 1. ipsa planta magn. nat., in qua prope *a* structura est omnino (ut in ramis inferioribus) *Chordariae flagelliformis*, superne vero ex. gr. prope *b.* eadem plane est *Dictyosiphonis*; f. 2 stratum exterius, *b.* stratum interius cellularum. — B. *Dictyosiphon Chordaria*: f. 1-2 planta magn. naturalis; f. 3-4 stratum thalli cellularum superius, in quo perihologonidia (*a a a*), in quibus hologonidium (*b. b*) bene apparet.

Tab. IX A. *Chordaria divaricata*: f. 1-2 ipsa planta magn. nat.; f. 3-4 asci, cum filo solitario paraphysoideo; f. 5 fila paraphysoidea. — B. *Leathesia difformis*: f 1 asci filaque paraphysoidea; f. 2. cellulae strati interioris in setas evolutæ. — C. *Elachista fucicola*, sectio verticalis. — D *Elachista globosa* Örsted mag. nat. — E. *Elachista stellaris* in *Desmarestia viridi*, magn. nat.

# Symbolae ad Historiam

## *HIERACIORUM.*

AUCTORE

**ELIA FRIES.**

### §. 1. *Ratio operis.*

Hieraciorum genus, in opprobrium scientiae, Botanicis adhuc praebet nodum quendam gordium, quamvis Florae Europaeae maxime sit privum. Cum Florae Europaeae accuratior cognitio totius rei herbariae in singularibus fundamentum sistat, uberior hujus expositio longe majoris momenti est quam fragmentitiae et steriles vulgo de plantis exoticis notitiae ex herbariis haustae, quare illius nodos solvere inprimis studeamus. Non is sum, qui Hieraciorum a me plane solutum fingam, attamen ex indefesso et continuo studio, quod generibus criticis Florae Europaeae per omnem vitam dicavi, etiam ad Hieracia extricanda symbolas quasdam offerre optavi. Frustaneum me suscepisse opus multi forsan judicent, fingentes hoc, genus prorsus esse vagum, anomalum, vel, ut ita dicam, irrationale, *quale tamen non naturae, sed auctorum culpa factum est.* Sic olim quoque censebatur de Cladoniis, Agaricis etc., quas ita extricasse mihi videor, ut facile omnes agnoscant earum historiam in singularibus jam esse definitam et stabilitam. Neque de veritate naturae in Hieraciis extricandis desperemus

quamvis arduus sit labor; modo omnia praejudicia mittamus v. c. studium species sive contrahendi, sive multiplicandi, assidui formas in natura typicas inquirentes. Novae constructionis fundamenta praebeat accuratius plantae vivae morphologicum et biologicum studium. Definitiones enim hactenus vulgo datae plurimas specierum modo analogarum formas includunt, ejusdem vero speciei frequentius excludunt. Ob manifestam characterum varietatem, multi, quos meliores cum *Kochio* inquirere piget, omnes subsimiles species coacervant; at caveas, ne fingas, eos veras, a se citatas, plantas ante oculos habuisse, qui v. c. cum *G. F. Meyer*, *H. rupestre* All., *H. pulmonareum* Sm., *H. Lawsonii* Sm , *H. bifidum* Kit, H. *pallescens* Kit, etc. ad H. murorum ducunt; omnes sine dubio quaesiverunt in formis vulgatissimi H. caesii. In genere minus novas species quaeramus, quam stabilitas servare, eruendo meliores characteres. Et Hieracia plurimas offerre notas essentiales, hactenus neglectas, infra demonstrare conabimur. At rite observare res est difficillima; haec facultas nobis haud innata est, sed multo studio et usu acquirenda; multi sane ea se observasse fingunt, quae sensu modo perceperunt. Num recte observare et judicare (nec modo, quod frequentius, sententiari) mihi contigerit, judicent periti et a partium studio alieni Botanici. Id saltim manifestum fere spero, me indefessum tam naturam, quam litteras contulisse.

Per quadraginta enim annos Hieracia spontanea diligenter observavi, ab amicis undique divites collectiones recepi, plurima simul colui. Ditissimam tam speciminum copiam, quam schedulas suas de hoc genere uberrimas et accuratissimas mihi tradidit amicus prorsus singularis *Blytt*, qui non modo Norvegica Hieracia per multos annos incomparabili diligentia observavit, sed etiam cum speciebus alpium et pyrinaeorum in loco contulit, ut magna operis nostri pars optimo viro debeatur. Singulos vero Herbarii nostri fautores hoc loco

nimis longum est celebrare. Britannicarum specierum, hactenus maxime obscurarum, plurimas completas collectiones debemus *Societati Botanices Edinensi*, nec non Cel. Viris *Borrer*, *Woods* et, additis americanis, *Leman*. Singulatim gratiam debeo quam maximam viris amicissimis *Boissier* et *Liebman*, quorum hic largam messem specierum Mexicanarum, ille tam orientalia nobilissima, quam multa Americana una cum schedulis magni momenti de speciebus quibusdam, e genere vero excludendis, in Musaeis Parisiensibus obviis, mecum communicarunt. His subsidiis in ordinem redactis, ad expositionem nostram comprobandam ampliora pervolvi herbaria, tam publica (v. c. *Herb. Universit. Upsaliensis*, *Hafniensis*, *Christianensis*, *Acad. Scientiarum Holmiensis*), quam privata v. c. amicorum antiquissimorum *Kunzei*, *Nymanni*, *Schouwii*, *Sonderi* etc., qui integras suas collectiones meo usui tradiderunt. Maximum vero fructum hausi ex Herbario *Caesar. Academiae Scientiarum Petropolitanae*, cujus integram hujus generis collectionem mihi transmitti, una cum Herbario Biebersteinii, singulari liberalitate permisit inclytissima Academia. Speciebus rarissimis et speciminibus authenticis specierum *Besseri*, *Frölichii* et veterum per imperium Ruthenicum peregrinatorum, locisque natalibus copiosis, tam ad systematicam, quam geographicam generis historiam plurima contulit. Ex his facile videre licet, me rerum copia premi.

## §. 2. *Generis Hieraciorum limitatio.*

Quemadmodum stellae in via lactea ita stipantur, ut singulas aegre distinguere liceat, sic quoque Synantherae, centrum totius orbis vegetabilis sistentes, ob formarum copiam et varietatem ita confluere apparent, ut tam generum, quam specierum limites aegre ponantur. Inter Cichoriaccas hae difficultates praepollere videntur; harum dispositionem naturae con-

gruam, hactenus vix propositam crederem. Cichoriaceae receptaculo epaleaceo a Cell. *Lessing* et *Decandolle* in duas phalanges distribuuntur, *Lactucaccarum* nempe at *Hieracicarum**), quarum illae dignoscentur „*pappo argenteo mollissimo fugaci*“, hae „*pappo rigidiusculo fragillimo demum sordidescente seu flavescente*“. Laevioris momenti censeo, hos characteres multis exceptionibus premi (v. c. in Hieraciis pappus saepe candidus et niveus, in *Crepide paludosa*, *sibirica* etc. rigidus est); maximi vero, eosdem peraffinia et nunquam segreganda divellere. Equidem cum Cel. *C. H. Schultz* jam pridem *Lactucaceas* distinxi achaeniis compressis; Hieracieis sunt teretia, costato-striata. Ex hac limitatione genera *Mulgedium*, *Reca*, *Dubyaea*, Hieracicis a Decandolleo subscripta, ad Lactucaceas transferantur et hunc locum primus obtutus confirmare videtur. A Lactucaceis vero ad Hieracieas transferenda *Crepis* et omnia affinia genera, quorum vix ulli limites ab Hieracicis exstant.

In Hieracicarum tribu, sic circumscripta, genus Hieracium centrum sistit, variis formis aberrantibus ad singula reliqua radians. Habitu tamen et partibus systematis vegetativi maxime conformibus genus aeque facile cognoscitur, quam characteribus artificialibus aegre circumscribitur. Haec vero ubique est vera ratio objectorum concretorum; modo notiones abstrusas et ideales stricte definire liceat. Quando igitur systematum vim in characteribus definitis ponimus, artificialia evadunt; natura enim et systema hoc sensu aeque oppositae sunt notiones, atque ars et natura. Infra exponentur aberrationes a sequente generis charactere ideali:

---

*) *Lapsaneae* utriusque sectionis aberratio pappo nullo; *Lapsana* Lactuceis maxime affinis. Recentiores perperam scribunt *Lampsana*; corruptam hanc orthographiam jam emendavit Linné. E nominis etymologia (a $\lambda\alpha\omega\tau\omega$, cfr. Vaill, act. par. 1721,) et Plinii auctoritate utique accuratius scribitur Lapsana.

HIERACIUM. Involucrum multiflorum, squamis nunc in seriem contiguam, nunc interruptam spiraliter dispositis imbricatum. Receptaculum nudum, sed scrobiculatum, fimbrilliferum. Ligulae apice 5-dentatae, circa faucem pilosae. Achaenia columnaria decem-costata, apice truncata, nec in rostrum attenuata. Pappus sessilis, albidus l. rufescens, pilis subuniserialibus simplicibus rigidis subfragilibus scabris, haud basi dilatatis. — *Herbae perennes, plus minus lactescentes, foliis sparsis indivisis antrorsum dentatis, vix umquam lyratis, runcinatis l. runcinato-dentatis, indumento duplici, altero piloso, altero stellato-floccoso.*

Priscis temporibus *Hieracii* nomen praebuit sentinam omnium facile Cichoriacearum habitu magis triviali; at ante Linnaeum facile omnes *Pilosellas*, quamquam limitatio varia fuit, tanquam peculiare proposuerunt genus. Vera ratio quoque est, Pilosellas sistere sectionem maxime definitam, argutius ab Hieraciis distinctam quam Andryalae et multas Crepidis species, ut genere absque haesitatione moverem, si ulli definiti characteres simul adfuissent. Achaeniorum minuties nempe sistit characterem nimis relativum et pappus uniserialis ancipitem et a genuinis Hieraciis mihi haud alienum — *Vaillantius* primus in Act. Acad. Paris. 1721 genus hodierno sensu limitivit, additis excludendis paucis*). Successive heterogenea magis accumulata sunt, donec Cell. Viri *Tausch* et *Frölich* eadem ac nos limitatione proposuerunt. Interea e speciebus in *Decandollei*

---

*) Nempe ad Crepides referendae n:s 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 46; ad Andryalas n:s 32, 33; ad Tolpides n:s 34, 35, 36, quarum differentiae tamen acutissimo viro haud latuere. Observanda porro sunt errata typographica in explicatione iconum Vaillantii l. c. t. VIII. f. 56—61 sistere achaenia specierum n:s 34—36, ac 29—31, ut l. c. indicatur.

Prodromo VII. adhuc sub Hieraciis militantibus, ad alia genera referenda sunt:

H. bracteatum *Smith*, e synonymo Cupani esset *Serialoe* sp., sed planta olympica ex Boissier in litt. est Crepidis species.
H. Broteri *Decand.* = Andryalae spec.
H. ciliatum *Willd.* = Seriolae spec., jam observante Vaillantio.
H. filiforme *Poir.* = Crepis.
H. globosum *Desf.* = Crepis montana.
H. glutinosum *Linn.* = Crepis pulchrae var.
H. sonchifolium. *Bieb.* = Crepis ex C. A. Meyer in litt. in Herb. Bieberst. nunc deest.
H. strictum. *Ledeb.* = Crepis stricta.
H. Triasii. *Cambass.* = Crepis, ex Pers.

## §. 3. *Distributio Hieraciorum in greges naturales.*

Ad uberiorem generis cognitionem nil plus confert, quam ejusdem in series et stirpes vere naturales distributio, sine qua omnis descriptio fallit. Omnis vastorum generum sectio ita comparata esse debet, ut superiores, si placeat, pro generibus,inferiores vero pro una specie, sensu latiori, sumere liceat. Hoc modo subdividuntur Hieracia in quinque series, quarum singulae abeunt in quattuor vel quinque stirpes sibi invicem eximie respondentes.

Ser. I. Pilosella. Innovatio herbae per stolones, nunc in rhizoma repens, nunc in caudiculos laterales abeuntes. Involucrum irregulariter imbricatum. Achaenia minima, striatula. Pappi pili tenuissimi, aequales.

a. Stirps *H. Pilosellae.* Rhizoma repens. Involucri squamae interiores spirales acutae. *Spec.* 1—8.

b. Stirps *H. Auriculae.* Rhizoma repens. Involucri squamae interiores verticillatae, obtusae. *Spec.* 9—16.
c. Stirps *H. praealti.* Radix a caule discreta. Involucri squamae interiores obtusae. *Spec.* 17—23.
d. Stirps *H. cymosi.* Radix a caule discreta. Involucri squamae interiores acutae. *Spec.* 24—30.

Ser. II. Aurella. Innovatio per rosulas. Involucrum multiseriale, contiguum. Achaenia magna (longiora), elevato-costata. Pili pappi rigidi, inaequales. *Alpinae.*
e. Stirps *H. villosi.* Glauca, radice ad collum nuda, inv. squamis villosis, acuminatis, ligulis glabris. *Alpes Europae centrales. Spec.* 31—36.
f. Stirps *H. Cerinthoidis.* Herba et invol. prioris, ligulis ciliatis. *Alp. Eur. occidentales. Spec.* 37—42.
g. Stirps *H. laniferi.* Glauca, *radice lanoso-comosa.* Invol. priorum, ligulis ciliatis. *Pyrinaei et Hispan. Sp.* 43—48.
h. Stirps *H. alpini.* Subviridia, glandulosa, invol. squamis acuminatis, ligulis ciliatis. *Spec.* 49—54.
i. Stirps *H. glauci.* Glauca, ad collum nuda, involucro farinoso, *squamis obtusis, scalaribus*!, ligulis glabris, *Sp.* 55—60.

Ser. III. Pulmonarea. Innovatio per rosulas. Involucrum interruptum, squamis exter. abbreviatis inordinatis. Achaenia brevia, truncata, striata, basi attenuata, pappo Aurellae.
k. Stirps *H. Andryaloidis.* Herba involucraque pilis densis eximie plumosis tomentosa, candicantia. *Spec.* 61—66.
l. Stirps *H. rupestris.* Glauca, setosa, stylo persistenter luteo, glabro. Ligulae glabrae *(Spec.* 67—72) l. ciliatae (73—76).
m. Stirps *H. vulgati.* Caesia aut viridia, pilosa, stylo fusco. hispidulo, sicco fuscescente, anthela discreta. *Sp.* 77—84.
n. Stirps *H. italici*, herba et stylo priorum, anthela contigua, squamis obtusis. *Spec.* 85—90.

Series IV. Stenotheca. Innovatio per rosulas, raro per gemmas. Involucrum abruptum; exterior series abbreviata, involucrum quasi exterius praebens; interior e squamis aequalibus subverticillatis. Achaenia gracilia, linearia l. sursum attenuata. Pappi radii aequales. *Extraeuropaea.*

o. Stirps *Tolpidiformis.* Phyllopoda. Involucri squamae elongatae, longe attenuatae. Achaenia truncata. *Africa austr.* Habitus *Tolpidis. Spec.* **91—93.**

p. Stirps *Pilosellaeformis.* Phyllopoda. Involucrum multiflorum, squamis acutis. Achaenia truncata. *Americ. merid.* Habitus *Pilosellae. Spec.* **94—100.**

q. Stirps *H. crianthi.* Phyllopoda. Involucrum dense villosum. Achaenia linearia, truncata. *Spec.* **101—106.**

r. Stirps *Pulmonaraeformis.* Phyllopoda. Involucrum paucirum, gracillimum. Achaenia elongata, linearia, sursum subattenuata. *Amer. bor. Spec.* **107—116.**

s. Stirps *Accipitrinella.* Aphyllopoda. Achaenia sursum haud attenuata. Habitus *Accipitrinorum. Spec.* **117—120.**

Series V. Accipitrina. Innovatio per gemmas clausas. Involucrum contiguum, plerisque distincte polyseriale. Achaenia truncata, pilis pappi rigidis inaequalibus.

t. Stirps *H. intybacei.* Hypophyllopoda, glanduloso-viscida. Involucrum subobvallatum, squamis aequalibus obtusis. Ligulae glabrae. Alpina. *Spec.* **121.**

u. Stirps *H. Prenanthoidis.* Pseudophyllopoda. Involucrum vulgo squamis exterioribus paucis, interioribus aequalibus obtusis. *Ligulae apice ciliatae! Spec.* **122—128.**

x. Stirps *H. tridentati.* Pseudophyllopoda. Involucri squamae interiores spirales decrescentes sensim acuminatae. *Iulio* optime florent. *Spec.* **129—134.**

y. Stirps *H. umbellati.* Aphyllopoda. Squamae involucri exteriores distincte polyseriales; interiores majores, verticillatae, obtusae, aequales. *Augusto* optime florent. *Spec.* **135—142.**

z. Stirps *H. Sabaudi.* Aphyllopoda. Squamae involucri subaequales adpressae obtusae, intimae verticillatae. *Septembri* optime florent. *Spec.* 143—150.

In Floris specialibus, ubi minor specierum numerus, sectiones inferiores s. Stirpes facile omittuntur. Iuvat vero attendere ad analogam evolutionem intradiversas series. Incipit nempe singula speciebus nanis, caule ramisve monocephalis, Piloselloideis et terminat speciebus habitu et facie Accipitrinorum v. c. Pilosellae elatioribus hypophyllopodis, Aurellae v. c. *H. Bupleuroide et specioso* aegre ab Accipitrinis distinctis; inter *H. vulgata* cisque respondentia *H. tridentata* vix ulli limites et Accipitrinellae inter Stenothecas vera sunt quoad herbam Accipitrina, licet ex involucro a Stenothecis distinguere haud liceat. Species seriei quartae, exclusis Tolpidiformibus, novo orbi privae, praecipue reliquas series manifeste adumbrant, licet intima inter se affinitate sint conjunctae. Infra videbis, quam eximie a geographica distributione omnes hae sectiones confirmantur.

## §. 4. *Characterum Hieraciorum examen.*

Radix praemorsa, plus minus obliqua, rhizomatis vulgo indolem habet, in paucis vero (Pilosellis) rhizomatis formam. Ex hac fasciculatae egrediuntur fibrae numerosae, praelongae, validae, simplices, in omnibus facile simillimae, at radix ipsa differentias quasdam haud spernendas offert. Sic v. c. in stirpe *H. laniferi* s. *amplexicaulis* radix ad collum lanoso-comosa est e. s. p.

Omnis inter caulem et scapum differentia inter Hieracia evanescere apparet et uterque terminus promiscue adhibetur.

Equidem caulem ubique appello, quando radix a caule discreta; repentibus Pilosellis tantum, s. radice in rihzoma manifestum abeunte et pedunculos subnudos exserente, scapum tribuo. Verum quidem est caulem inter Aurellas, Pulmonareas et Stenothecas saepe simplicem occurrere et nudum, at typice ramosus est, ut infra videbimus, et foliorum praesentia vel defectus ne species quidem distinguit. Sic caulis typice foliosus, foliis in bracteas reductis, aphyllus evadit v. c. in *H. Staticefolio* multisque aliis: omnes facile Pulmonareae caule et nudo l. monophyllo variant et axeos prolongatione folioso; quo plura folia in caulem adscendunt, eo pauciora restant ad basin. Hinc singulae speciei alia forma basifolia, alia caulifolia. Exstat vero perpetua differentia inter *caulem foliosum*, i. e. foliis omnibus cauli adnatis et contiguis, etiam si folia omnia ad basin in rosulam collecta sint, et *caulem scapiformem*. In hoc folia radicalia e collo radicis egrediuntur, petioli basi caulem vero vaginant et ex horum centro emergit caulis basi omnino nudus, licet altius saepe folia pauciora proferat. Tertia species est *caulis aphyllopodus*, in quo folia omnia a basi remota et inferiora vulgo emarcida. Quam essentialis et constans hic character sit, tam fallax in praxi, nisi ad gemmarum indolem simul attendatur.

Caulis ceterum vix ullas essentiales differentias in genere offert, si caulem solidum demum sublignosum (H. fruticosa Veterum) et cavum l. medulla laxiori farctum exceperis. Caulem simplicem vel ramosum, rigidum vel debilem, elatiorem vel humilem, sparsi- et densifolium, hispidum l. glabrum, mono- vel polycephalum, in eadem specie occurrere testantur H. umbellatum et multa alia, in quibus singulam harum rationum variabilem esse facile videbis. Prorsus falsae sunt omnes species caule prostrato et humifuso distinctae (v. c. *H prostratum*, *auriculatum*, *diffusum* e. s. p.), typice omnium caulis est erectus, strictus (caulis flexuosus itidem accidenta-

lis lusus), vel e basi adscendente erectus; at decumbens fit vel locis valde nemorosis propter caulis debilitatem (*H. umbellatum* etc.) vel frequentius in arenosis maritimis (*H. prostratum*, quod variis speciebus *H. eriophoro! H. umbellato!* et, ex Cel. Ledebour, *H. viroso* originem suam debet) a ventis prostratus.

Folia Hieraciorum omnium in maxime essentialibus congruunt; sunt nempe, radicalibus exceptis, cauli contigua, nec articulata, inordinate sparsa, indivisa, antrorsum denticulata, subtus nervosa, venis plus minus anastomosantibus. Folia runcinata l. runcinato-dentata ab Hieraciis aeque aliena, ac Crepidibus communia. Quoad situm variant plus minus remota et conferta; in Accipitrinis quibusdam subinde videre licet folia ita geminatim approximata, ut opposita appareant. Quoad insertionem observamus tres typos, *amplexicaulem*, *sessilem*, *petiolatum*, qui bonos offerunt specierum characteres, at haud sine salis grano et uberiori observatione interpretandos. Sic folia amplexicaulia in formis macrioribus tantum sessilia evadunt, petiolata pariter subsessilia et praecipue inferiora vulgo in petiolum, longitudine e statione admodum varium, elongantur. Inter folia amplexicaulia distinguendum inter *folia basi lata, caulem amplexante*, vel *adnata* vel auriculis liberis amplectentia. Forma foliorum in singula specie ad certum typum quidem reduci potest, at ceterum latiora et angustiora, plus minus acuta et dentata l. integerrima in omni specie ludunt. Sic H. umbellatum legitur foliis angustissimis fere filiformibus integerimis, sed et late ovalibus et pectinato- et porrecto-dentatis. At quamvis dentium praesentia fallacem modo praebeat differentiam, eorum indoles saepe constantem v. c. utrum dentes baseos an medii folii maxime evoluti; in stirpe *H. umbellati* et *tridentati* medio praecipue dentata; in stirpe *H. sabaudi* et *Pulmonareis* a basi ad medium. Porro folia in aliis laevigata et nitida fere v. c. in *H. Cerinthoideis*, in aliis rugulosa impolita; folia aliis sursum decrescentia(singularis ratio folio-

rum in bracteas haud floriferas reductorum in *H. crinito* etc.) aliis increscentia, saltim inferioribus latiora, aliaeque subsimiles rationes multo majoris sunt momenti, quam foliorum forma, numerus e. s. p. Nervis quoque paginae inferiores nunc triplinerves vage anastomosantes, nunc dense reticulato-venosae, quam differentiam semper constantem inveni.*)

Petioli in aliis alati, in aliis anguste canaliculati; foliorum basi praecipue dentatorum etiam dentati. Hirsuties in petiolis, quam in foliorum lamina, densior.

Indumentum herbae duplicis generis est, alterum pilosum, alterum stellato-floccosum; pilosum insuper vel simplex, vel glanduliferum, vel denique, in regionibus calidioribus, manifeste plumosum. Hujus indoles multas primarias offert notas, ut species pilis manifeste plumosis propriam stirpem sistant. At glandulae in multis speciebus typice glandulosis deficiunt, restantibus modo pilis simplicibus iisque tum vulgo densioribus villosis, ut in Pilosellarum involucro, typice glanduloso-piloso, praecipue conspicere licet. Folia glandulosa viscida essentialem praebent differentiam *H. humilis*, *amplexicaulis*, etc., sed occurrunt etiam foliis siccis eglandulosis, at ideo hic character non spernendus, cum typice eglandulosa numquam glandulas acquirere possint. Differentiae indumenti in singularibus plenius exponentur, hoc loco modo addendum indumenti praesentiam levioris esse momenti, quam praesentis indolem; hispidissimae species glabrescere possint (ut *H. praealtum*, *cymosum*, *Echioides*, *incanum*, *Onosmoides* etc.); et pili longiores l. breviores,

*) Laudat insuper Div. *Frölich* folia membranacea et coriacea, sed haec differentia manifeste e statione pendet; locis umbrosis membranacea pallescentia, apricis coriacea, rigidiora, glaucescentia.

rigidiores et molliores in omnibus manifeste variant. Constantius est indumentum stellato-floccosum, vulgo canescens.

Quamvis definitos limites inter species glaucas et virides ponere haud liceat, haec differentia inter primarias censenda. Tota *Aurellarum* series typice glaucescit; vidimus tamen tam harum v. c. *H. Bupleuroidis*, quam *H. Auriculae* etc. individua lacte viridia absque glaucedine, quales lusus vero oculum exercitatum haud fallunt. Viror nempe in speciebus typice glaucis, deposita glaucedine, lactior est, gramineo-virens, prorsus diversus a cano-virente vel obscure viridi reliquorum. Inter *Pulmonareas* vero limites difficilius ponuntur ob species caesias, prorsus intermedias, at in vere glaucis stylus persistenter luteus et glaber; in reliquis fusco-hispidulus et siccitate fuligineus.

Quanta in inflorescentia universali (partialem non loquor) varietas neminem fugit; singula facile species, anthela quoque maxime composita, individua hebetata monoceptala simul enitur. Praecipuae inflorescentiae in hoc genere sunt *umbellata*, *cymosa*, *corymbosa*, *paniculata* et in Americanis simul *thyrsoidea* et *racemosa*, verum in eadem specie in se invicem facile transeunt. Hoc nimis longum esset in singularibus deducere et superfluum simul, si attendatur ad inflorescentiae typum semper centrifugum et indefinitum ejusque lateralem evolutionem. Caute modo distinguamus inter caulem ramosum et anthelam compositam. Veri rami non modo capitula, sed et folia gerunt.

Capitulorum magnitudo in eadem specie maxime varia est et a florum numero aucto l. diminuto pendet. Plerisque speciebus alia forma macrocephala, alia microcephala. Sunt vero in hac varietate certe modi, ut v. c. Aurellarum capitula numquam aeque exigua evadere possint ac Stenothecarum. Communis hujus variationis lex est; quo magis in singula specie caulis

elongatur et multiflorus evadit, eo minora capitula enititur et versa vice. Formae alpinae semper oligocephalae et macrocephalae; maxima Hieracii capitula vidi in formis subacaulibus H. Pilosellae et H. albidi. Capitulorum forma quoque pendet e florum numero aucto aut diminuto; huic involucra magis gracilia et cylindrica, illi ventricosa. Receptaculum in omnibus typum supra indicatum servat; variant modo fimbrillae areolarum in aliis speciebus brevissimae, in aliis in pilos fere elongatae, quae rationes constantes praebent differentias.

Gravissimae, at nimis neglectae differentiae in involucri fabrica latent, quare has tam in seriebus et stirpibus limitandis, quam speciebus definiendis, ubique laudavimus. Ut vero harum vis et interpretatio rite percipiatur, attendendum ad typum involucri, in omnibus e squamis spiraliter dispositis et imbricatis formati. Verum squamae nunc sistunt *seriem contiguam polyserialem*, externis vel minoribus et brevioribus ut in stirpibus *H. glauci*, *H. umbellati* etc. — vel longitudine subaequalibus, ut in plerisque Aurellis, quarum involucrum hinc saepe simplex apparet, nisi foliis in bracteas reductis involucratum, quod etiam in *H. alpino et albido* observare licet — *nunc varia ratione interruptum.* Hoc in Stenothecis maxime manifestum est, quare duplici quasi involucro instructae apparent; exterius e squamis brevissimis, interius e squamis elongatis aequalibus formatum. (Inter Europaeas plantas *Crepis paludosa* s. *H. paludosum* L. hunc typum exprimit et in hac regione transitus ad Crepides manifestissimus; in Stenothecis optimis achaenia etiam elongata et sursum leviter attenuata). *H. intybacea* et *Pulmonarea* quaedam italica involucrum habent fere uniseriale, squamis paucis brevioribus haud ordinatis. In *H. prenanthoide* et Pulmonareis plurimis autem squamae exteriores breviores irregulariter imbricatae, quod seriem spiralem abruptam indicat. Majoris adhuc vero momenti est, *utrum intimus squamarum cyclus etiam spiralis sit et apertus — an in se ipsum recurrat, verticil-*

*lum formans.* In illo typo squamae interiores sensim angustiores, minores et magis acuminatae; in hoc latiores, majores et obtusissimae, ut in *H. umbellato* et *H. tridentato*, *H. Pilosella* et *auricula* comparatis optime conspicere licet. Haec est vero interpretatio sectionum *Copholepidarum* et *Oxylepidarum* Frölichii, qui hanc differentiam quidem subodoravit, at non clare perspexit et inconstante applicatione prorsus obfuscavit. Squamarum forma et color quoque differentias haud spernendas offerunt, at haud sine cautela citandae. Sic plurimae species alpinae, involucro nigrescente, colorem viridem vulgo induunt locis infraalpinis vel in hortis Botanicis v. c. *H. elatum*, *lycopifolium*, *prenanthoides*, *sudeticum* etc. Etiam *H. umbellatum*, *aestivum*, *boreale* e. s. p. formam habent involucro viridi, immo stramineo; *H. Sabaudi* involucrum, typice rufofuscum, quo ab omnibus differt, locis nemorosis saepius virescit.

Indumentum involucri et pedunculorum, instar herbae, duplex vel floccosum vel setosum; illud frequentius et constantius, hoc rarius est et accidentaliter deficit. Indumentum floccosum in omnibus conforme est, modo rarius, per aetatem evanescens aut densius; at pilosum multum variat. Deficiente indumento floccoso involucrum vulgo atrovirct et siccitate nigrescit. Pilis involucri carent species e stirpe *H. glauci* et quaedam Stenothecae et Accipitrinae. Vulgo glandulosi sunt pili, sed in eadem specie glandulae saepius disparent; at typice eglandulosi numquam glandulas acquirunt. Disparentibus glandulis pili longiores et densiores, saepe lanati, evadunt.

Ligulae eundem servant ubique typum, non tamen absque omni varietate. Stenothecarum ligulae reliquorum conspicue vulgo minores et angustiores. Singularem differentiam praebent *ligulae* in aliis *subradiantes*, in aliis *aequales; subradiantes* dicimus, quando flores exteriores reliquis multiplo majores. Sic *H. ramosi* capitula haud minus multiflora sunt, quam v.

c. *H. saxifragi*, at capitula hujus triplo majora apparent ob ligulas exteriores radiantes. In formis stolonifloris et flagellaribus *H. Pilosellae*, *H. furcati* etc. flores marginales subtus concolores evadunt propter florum radiantium defectum. Ligulae undique pilosae characterem essentialem sistunt *H. alpini*, *parnasi*. Ligulas in aliis esse ciliatas, in aliis glabras primus clare exposuit Koch. Hic in specierum limitatione utique primi ordinis est character, sed ad tribus stabiliendas vix sufficit. Non modo per gradus insensibiles ligulae ciliatae, scilicet in diversis speciebus, in apice glabras transeunt (in multis speciebus ciliae adeo brevissimae ut in ligulis virgineis modo observantur v. c. in *H. saxifrago*, inciso c. s. p.); sed inter affines etiam aliae ciliis ornantur (v. c. *H. longifolium*, *elongatum*), aliae destituuntur (v. c. *H. villosum*, *dentatum*; *H. murorum* in *borealibus* ligulis ciliatis saepe legitur. In *H. cydonaefolio* vero et *H. elato* ligulae extimae vulgo glabrae, interiores vero ciliatae. In haud paucis a Kochio haud ciliatis dictis, cilias observo tam in speciminibus ob illustri viro largitis (v. c. *H. Schmidtii*) quam plantis e seminibus ejusdem educatis (v. c. *H. glabrato*). Quod vero ad florum colorem, albido forsan exceptо attinet, hunc ad species discernendas nullius momenti censeo; *H. aurantiacum* optimum legitur etiam ligulis flavis, croceis, purpureis cum omnibus coloribus intermediis, temere hybridis dictis, et plurimae aliae Pilosellae floribus aurantiacis simul variant. Ligulae subtus purpureo-vittatae in quibusdam speciebus in statu normali obviam veniunt, ut in H. *Pilosella*, *furcato* etc., sed ipsorum formae flagellares apud nos per latas plagas occurrunt ligulis utrinque concoloribus.

Longe constantior est styli color; hujus colore persistenter luteo dignoscuntur Pulmonareae glaucae a P. caesiis e. s. p., quarum stylus siccitate fuligineus. Quanti momenti styli color sit testatur H. *Aurantiacum*, in quo sub infinita ligularum quoad colorem varietate stylum semper in fuliginosum

abire vidi. In Aurellis quibusdam stylus virescit, qui color in *H. staticefolio* magis incenditur, ut etiam ligulae exsiccatae virescant. In speciebus stylo luteo stylus simul glaber apparet, in speciebus stylo decolorante in vivo sub lente fuscohispidulus.

Stenothecis exclusis achaenia in hoc genere mire conformia sunt; omnis fere differentia in colore et magnitudine posita est. Sic *H. Pilosellae* certissime distinguuntur achaeniorum minutie, quae etiam in formis maximis, ut *H. procero*, *incano* etc. constans est. E contrario in Aurellis achaenia pro ratione maxima, unde valleculae inter costas planiusculae, nec ita sulcatae apparent ut in Pulmonareis. Inter has exstat simul conspicua differentia longitudinis achaeniorum. Sed achaenia in ambitu curvata minoris momenti sunt; in formis micranthis ejusdem speciei saepe desunt. Pappum uniserialem in Piloselis et subbiserialem in reliquis dicit Ill. Koch, quae vero differentia practico usui parum inservit et extra Pilosellarum gregem, v. c. inter *Stenothecas*, saepe prorsus oblitteratur. Pappus rufescens, flavescens vel omnino albus in speciebus ceterum affinibus variat.

## §. 5. *Biologicae Hieraciorum rationes.*

In tanta characterum externarum varietate specierum limites haud ponere licet ita acutos, ut quodcumque specimen imperfectum vel degenerans mox tute determinare liceat. Ex herbariis omne Hieraciorum studium hauriri non potest, tantum ex pleniori observatione biologicarum rationum. Hinc quid species, quid varietas numquam neque ex facie externa nec e characteribus dijudicare licet, modo ex continuata observatione et longa experientia.

Hieracia omnia sunt plantae perennes; innovatio ipsius plantae triplici fit ratione vel *stolonibus;* vel *rosulis;* vel de-

nique *gemmis clausis*, qua differentia vix ulla superior. Innovatio per stolones Pilosellarum gregi propria est; a typo nullius harum speciei aliena. Omnibus stolones in potestate adsunt, licet vulgo deficiant foliis plurimis in caule adscendentibus. Maxime stoloniferae quoque et solo sterili arido et inter gramina altiora stolones amittunt; vulgo estolonosae autem in humo denudata stolones exserunt. Ex his facile intelligitur, quam lubricum fundamentum ad species discernendas offerunt, ad tribus determinandas prorsus falsum. Caules laterales adscendentes in speciebus strictis, absque rhizomate manifesto, aperte sunt stolonum species. Est vero in stolonibus perpetua differentia. In aliis nempe speciebus rhizomatis speciem, per terrae superficiem repentem scapumque exserentem, sistunt; in aliis, radice a caule discreta, sub terra exserunt et in nova individua, radice obliqua, abeunt. Ubi e terra emergunt vel rosulae sistunt caules laterales adscendentes vel, ut vero supra monui, solo humoso denudato in sarmenta stolonosa simul abeunt, at rhizoma non sistunt vel hoc continuant, sed apice radicant et a matre segregantur. Innovatio per stolones praecox est et aestivalis.

Innovatio per rosulas autem autumnalis, Aurellis, Pulmonareis et plerisque Stenothecis communis. Quam manifeste rosulae a stolonibus differunt, tam aperte stolones subterranei in rosulas abeunt; rosulae pariter inter muscos altiores vel in arena mobili natae ob soli indolem infra folia in caudiculum stoloniformem passim elongantur. In Sicilia, ob hyemum mitem, frequentior est ratio, rosulas jam autumno in caudiculos excrescere et ob hanc rationem Pulmonareas siculas inter Accipitrina recepit d. Frölich. Folia rosularum primordialia sequentibus minora, obtusiora et magis integra, marcescentia, licet in ver persistant, sed vera folia radicalia ex harum centro serius explicantur et persistunt, novas rosulas emittentes. Rosulae enim frequenter in foliorum alis gignuntur, in aliis vero ex ipsa radice.

Maxime serotina est innovatio per gemmas clausas, quae herba deflorata e caulis basi demum explicantur. Peculiares sunt gemmae clausae speciebus caule elongato, folioso, praecipue Accipitrinis, veteribus *H. fruticosa* dictis. Folia reliquorum primordialia nunc abeunt ob instantem hiemem in squamas, reliqua omnia normaliter in caulem adscendunt, a basi saepe remota. Inferiora folia in his semper marcescunt ante superiora, quod vero etiam in variis Aurellis, ut *H. speciosо*, *H. Bupleuroide* etc. (apud nos in Horto saepius sub anthesi aphyllopoda sunt) et Pulmonareis observatur. Haec hypophyllopoda dixerim, ut a vere aphyllopodis distinguantur.

Specierum multiplicatio per stolones est fons infinitae varietatis Pilosellarum. Individua hac ratione orta semper plus minus differunt a planta primaria. Individua stolonosa vulgo adscendentia; folia magis in scapum l. caulem adscendunt, et quod maxime fallit, inflorescentia fit furcata, et ligulae saepe utrinque concolores, ubi in typica planta discolores. Haec est vera ratio scapi furcati, quem cel. Naegali ex hybriditate derivandum censet; *equidem* ipse, absque omni hybriditate, arte produxi quam plurimas formas furcatas. Experimentum facias cum *H. aurantiaco*; e seminibus educatum cymigeruno, stololonibus resectis propagatum furcatum evadit.

Ut in foliorum radicalium alis vel infra easdem novorum individuorum fit innovatio, sic etiam ipsius plantae ex alis foliorum ad typum centrifugum, tam herbae, quam anthelae. Omnis ramificatio dichotoma l. furcata in hoc genere spuria est. Caulis Pilosellarum vulgo simplex est, et anthela modo ramosa; nullae enim gemmae adsunt in alis foliorum caulinorum; individua ramosa e stolonibus orta. Sed in reliquis *omnibus caulis semper ramosus est vel in potestate ramosus.* Multis paradoxa videbitur haec thesis; at inquirant velim accuratius individua simplicissima et *in omni ala invenient ramulum arbortivum*: Hinc facile intelligitur, cur caulis simplex vel

ramosus numquam species distinguat; utrum ramuli explicentur, an marcescant, ex externis momentis pendet. Caule primario depasto, vel foenimessorum falce resecto vel in rupibus aridis a sole adusto ex alis inferioribus enascuntur caules laterales gracilescentes, paucifolii, quales saepe *H. rupestre* dicuntur. Pilosellarum nisus caules laterales producendi, immo stolones, respondet ramificandi facultati in reliquis; nam Pilosellae in foliorum caulinorum alis ramorum rudimentis carent, at pedunculos saepe exserunt. — Innovatio anthelae centrifuga eundem sequitur typum ac caulis, est modo vulgo magis composita.

Inter biologicas herbae rationes etiam citanda est lactescentia, quae in diversis speciebus eximie differt. Sic *H. virosum* et affinia uberrimo lacte scatent, *H. sabaudum* ejusdem stirpis paene exsuccum. Lac, ut Cichoriaceis commune est, album. — Singularis physica qualitas pilorum est, colorem album senio, in herbariis diutius servatorum, in rufo-ferrugineum l. ferrugineum abire. Inde ortae varietates multae, quae in natura neutiquam existunt, v. c. apud Frölichium *H. Pilosella v. Barbarossa*, *H. Auricula Vahlianum*, (sub quo e nomine plantae danico: langbladet Ornöja i. e. longifolium Hieracium, ficta est plantae statio!) *H. alpinum v. Barbarossa*, *H. scabrum v. hirsutum* e. s. p. Etiam in speciebus ferrugineo-hirsutis dictis v. c *H avilae*, hic color siccitati originem debet, at saepe ad species discernendas juvat haec coloris mutatio. Sic genuinum *H. echioides* aliquid temporis in herbariis servatum ab analogis formis specierum affinium mox dignoscitur involucro suo floccoso-ferruginoso. In aliis involucrum siccitate fusco-fulvescit *(H. alpinum)* vel omnino fuscescit. In omnibus facile Pulmonareis et plerisque Accipitrinis folia variant *maculata* vel subtus rufotincta. quod varietates non indicat. Varietates Auctorum in genere individuales censeo lusus.

Sub evolutione plantae ipsius summum locum tenet transitus herbae in anthelam v. foliorum in bracteas transformatio.

Inde oritur *anthela* aliis *discreta*, aliis *contigua*. *Anthelam contiguam* appellamus, quando folia sensim absque limite reducuntur in bracteas l. folia diminuta vel omnes pedunculi foliis evolutis suffulciuntur; *discretam* autem cum foliatio abrupta, foliis evolutis nempe infra anthelam definite desinentibus et saltu in bracteas transformantur. Haec ratio inter Pulmonareas, illa inter Accipitrina normalis est. Multae species simillimae hac differentia facile dignoscuntur, etiam monocephalae v. c. *H. alpinum* et *H. nigrescens*; utrumque bene evolutum polycephalum est, sed in *H. alpino* pedunculi laterales semper folio perfecto, in *H. nigrescente* bracteis suffulciuntur. Oblitterari videtur haec differentia summopere insignis, licet prorsus sit praetervisa, caule ramoso, at si attendatur ad anthelam partialem ramorum conspicua manet. *Foliatione contigua squamae involucri seriem continuam vulgo sistunt*, *et versa vice.*

Capitula plures offerunt biologicos characteres. Virginea vulgo sunt erecta, in una alterave specie vero cernua; deflorata quoad formam varie mutantur. Aestivatio involueri varia ex ipsius constructione supra descripta pendet; squamae vero intimae in aliis floribus virgineis *incumbentes*, in aliis *porrectae*. Aestivatio corollae involuta est, ex quo typo anamorphoses corollae v. c. tubulosa facile explicantur. Vigiliae florum haud satis observatae; flores expanduntur materius, quam campos visere soleo; Pilosellarum vero flores ad meridiem vulgo contrahuntur, cum Accipitrinarum vespere adhuc expansos videre licet. — Florendi tempus pendet e caule plus minus folioso. Hinc primo florent (majo jam) Pilosellae scapigerae; junio, julio caulescentes; junio subaphyllum H. murorum, julio potissimum H. vulgatum et Pseudoaccipitrina, Augusto *H. umbellatum* et affinia, Septembri demum *H. Sabaudum*, *boreale*, *virosum* et affinia. At hoc in genere dictum volui, cum florendi tempus e omni climate, statione etc. varie temperetur. Formae boreales ejusdem speciei praecocius florent in horto nostro, quam ejusdem speciei australiores varietates. *H. virosum* v. c. vulgo defloratum est, florente *H. folioso.*

Hieracia seminibus facillime propagantur; plurimas species educavi ex achaeniis speciminum siccorum in herbariis diu conservatorum. Omnium maxime illustre exemplum praebet *H. humile*, quod educavi e speciminibus 1610 collectis et in Herbario Burseri servatis. Exinde eorum cultura facillima.

Anamorphoses parum curandas fingimus, praecipue ex insectorum larvis ortas, antiquitus nimis celebratas, a re herbaria prorsus alienas censens; ex his non modo caules et petiolos, sed etiam involucra intumescere vidimus. Monstrositates corollae tantum cito, ne quis in his species quaerat v. c. *H. tubulosum* e diversissimis speciebus originem ducens. Quadruplicem observavi corollae aberrationem *a)* formam *stylosam*, corolla abortiva; *b) tubulosam*, ligulis tubulosis nec fissis; *c) semitubulosum*, ligulis longe tubulosis, apice vero limbo brevissimo terminatis *(H. cymosum) d) regularem*, raro obviam et tantum in centro capitulorum; unus alterve flos regularis in lacinias 5 acuminatas aequales usque ad tubum partitus. Cel. Monnier insuper describit deformationem *corolla labiata*, in H. alpino(?) semel observatam. Haec aperte testantur inconstantiam characterum e partibus quoque maxime essentialibus!

Difficultatem specimina exsiccata determinandi haud parum auget oblitteratio faciei, singulae speciei in vivo propriae et conspicuae. Species glaucae, v. c. *H. oreades* in vivo argenteo-glaucum, siccitate pallescunt tantum; species glandulosae viscositatem suam prorsus amittunt. Involucri forma et receptaculi indoles in speciminibus compressis aegre observantur et involucri structura tantum ab exercitato oculo determinatur. Pubes stellata in speciminibus exsiccatis haud raro disparet. A planta ipsa alienae rationes sunt determinatori etiam molestae, in herbariis vulgo desideravi tam specimina achaeniis maturis (caveas ne ex immaturis colorum determines) quam rosulis vel gemmis instructa, autumno seriori et praecipue Octobri colligenda.

## §. 6. *Geographica Hieraciorum distributio.*

E diversis Synantherearum familiis Cichoriaceae maximum suum habent in Europa, et horum genus centrale, Hieracium, potissimum Europaeum est. Ab ultima Lapponia ad mediterraneam Italiam, a Lusitania littorali ad maxime continentales Asiae regiones late regnant Hieracia, ab imis convallibus ad summa alpium juga adscendentia. In alpibus maximus specierum numerus accumulatur, individuorum vero in regionibus silvatico-montanis, saltim in Scandinavia multis locis silvas caeduas et campos saxosos deaurant et regionum physiognomiam praebent. Stationem praeprimis deligunt siccam, rupestrem, glareosam, graniticam, ut saxorum et montium fissuras; paucae stationem humidam v. c. *H. succicum*, *diaphanum*. Quae per nemora campestria luxuriant, exceptis Accipitrinis plurimis, mihi videntur formae degeneratae et luxuriantes specierum regionum montosarum.

Ab indicata regione paucissimae normales species, toti arcticae zonae communes, in Americam maxime borealem transeunt, nempe *H. alpinum* et *H. vulgatum*, at non *H. murorum* — et *H. canadense* vere Americanum, versus meridiem longius descendens. Cum illius Americae partis stirpes sunt maxime autumnales, haud mirum mihi videtur species quasdam Hieraciorum serotinorum ibidem simul nasci. Deest vero in omni America singulum vestigium Pilosellarum, Aurellarum e. s. p. Citantur quidem Pilosellae e montibus Americae meridionalis v. c. *H. glaucifolium* Fröl. *H. Loxense* Benth. etc. sed accuratius examen achaeniorum clare docuit, haec pertinere ad *Stenothecarum* seriem, quod subgenus per omnem Americam tam borealem, quam australem late dispersum est, ubique vero longe inferiorem vegetationis partem praebens quam Hieracia genuina in Europa. Exclusis a genere *H. paludoso* et *succusaefolio*, quae ad Stenothecarum typum accedunt, unica modo species in veterem orbem transit, nempe *H. triste*, in insulis Aleuticis et Kamtschatka simul lectum, ut *H. alpinum* in A-

mericam areticam. Singulare porro videtur diversas stirpes Americanae serici, areto inter se conjunctas licet vinculo, singulas series Europae aemulari, nempe Austro-Americanas nostras Pilosellas, boreali-americanas Pulmonareas et Accipitrinas — tandemque summorum montium species in America centrali vel areticas Aurellas Europaeas. — Novae forsan serici rudimenta sistunt duae l. tres species in Capite Bonae spei, Madagascaria et Indiae orientalis montibus lectae, quas vero ob characterum defectum et formarum inopiam hoc loco Stenotheeis subscripsimus.

At etiam in optima Hieraciorum patria, Europa nempe et adjacente Asia, species inter se multo magis in diversis terris diversae sunt, quam vulgo fingitur ex analogis modo formis sub eodem nomine venditatis. Singulis alpium primariarum jugis privae videntur non modo singulares species, sed stirpes etiam. Sic Pyrinaeis proprium videtur *H. Cerinthoides* Gouan (nec Linn. et Smith.) cum multis affinibus formis; in alpibus Europae centralis luxuriant stirpes *H. intybacei*, *H. glauci* et *villosi*, prima excepta vix in Pyrinaeis, certe nullibi in Europa boreali, orientali l. Sibiria obviae. *Rupestres* maximum suum habent in subalpinis Scandinaviae. *Prenanthoideae* omnibus Europae alpibus quidem communes sunt at singulis peculiaris species, Helveticis *H. ochroleucum*, Caucasicis *H. caucasicum c. s. p.* E typis inferalpinis Pilosellae manifeste maximum suum habent in Europa orientali et Asia adjacente, clima maritimum fugientes, ut in Britannia, Sicilia, Sardinia et plerisque insulis occidentalibus sola restat H. Pilosella cum affinibus secundariis formis.*) Etiam in Norvegia, Suecia, omni

*) *H. auricula* et *dubium* Fl. Brit. certissime longe distant a speciebus hujus nominis continentalibus; et absque dubio sunt e stirpe *H. Pilosellae* aut hujus varietates, ut cuique genuinos fontes, *Woodward* apud Wilthering et *Hudson*, consulenti patebit. (Smithius, hoc loco, ut multis aliis, rem obfuscavit, primo in Fl. Britannica icones florae Danicae transponendo, dein icones plantarum peregrinarum in Engl. Bot. tradendo. Hieracia Auricula, praecalta et cymosa, mire quidem, at aperte in flora Britannica desiderantur; *H. Aurantiacum* adventitium est. Hudson e descr. potissimum *H. bifurcum* (icon vero Engl.

Dania etc., H. Pilosella et Auricula exceptis, plagas occidentales fugiunt. Nobilissimae species Pilosellarum *(H. incanum, H. procerum, H. olympicum, H. macrotrichum)* orienti privae; aliae ibidem maxime luxuriant v. c. *H. pratense*, *echioides* (species in omni Sibiria vulgatissimae); sed occidentem versus ad Viennam, Bohemiam, Silesiam etc. extensae. H. Auricula vero in Sibiria et terris Caucasicis*) deest, ibidemque substituta ab *H. bifurco*, *auriculaeformi.* Sunt vero *H. breviscapum* alpibus pyrenaicis, *H. nivale* Europae centralis privae et *H. Suecicum* zonae subarcticae, in Islandia, Norvegia, Suecia media, Rossia boreali et Sibiria obvium. Si tam physiologicas rationes vegetationis, supra expositas, quam geographicam distributionem cognovissent auctores, neque formas stolonifloro-furcatas (vix varietates dicendas!) neque nobilissimas species, v. c. *H. pratense*, *H. echioides* etc. per omnem Sibiriam vulgatissimas, deficientibus perhibitis parentibus, species hybridas dixissent.

Aurellae alpibus Europae australis, ut supra monuimus, privae sunt; species ligulis glabris maxime orientales *(H. villosum* cum affinibus deest in Pyrinaeis), ligulis ciliatis in Pyrinaeis centrum habent, unde in Hispaniam, Irlandiam et Angliam transeunt. Extremos Germaniae limites occidentales modo tangunt. Pulmonareae per omnem Europam quidem crescunt, sed aliae longe species v. c. in Scandinavia et Italia. Accipitrinae aestivales centrum suum habent in septentrione; serotinae vero s. stirps veri *H. Sabaudi* in Italia et Europa mediterranea, solum *H. boreale* ex hac grege in Europa boreali occidentali longius versus septemtrionem progreditur. De specierum singularum distributione geographica plenius videas suis locis.

---

Bot. sistit *H. furcatum*; *H. nivale* in Westmorlandia crescere nequit) pro *H. auricula* habuit; *H. dubium* Wood. manifeste est *H. stoloniflorum* aut forma flagellaris *H. Pilosellae*, cfr. admirabilem apud Wither. descriptionem.

*) H. Auricula *M. Bieb!* est H. praealtum; H Auricula Bess.! *H. pratense*; Besseri vero *H. glaucescens*, ad specimina archetypa! est verum H. Auricula.

Hoc vero loco observare juvabit, quosdam characteres non quidem a climate pendere vel mutari, sed in certis regionibus tantum prodire. Sic omnes species pilis herbae plumosis ad regionem mediterraneam pertinent, ut hac statione etiam analogis Andryalis sint vicinae. Species herba glanduloso-viscosa etiam Europae australi privae sunt; *H. prenanthoides* in summo septentrione in pedunculis et involucris insuper omnes amittit glandulas. Species alpinae involucro nigricante vulgo gaudent, sed inferalpinis locis et in Hortis Botanicis vulgo virent. Hieracia glauca incolunt rupes apricas; in nemorosis saepe virent. Solo calcareo floccis densis capitula saepe albicant.

Cum Hieracia seminibus facillime propagentur, achaeniaque mediante pappo, aliarum Synanthercarum more, e statione naturali facillime late disseminentur, facile explicatur specierum saepe sporadicus proventus. Hac ratione in statione praeternaturali propagatae vario modo insuper degenerant, quod probe attendas, ne in his sporadicis formis hybridas quaeras. Quam facile ex hortis Botanicis disseminantur, testantur vulgo plurima Hieracia peregrina extra hortos Botanicos obvia. Sic extra Hortum Botanicum Upsaliensem nunc sponte propagata videre licet fere omnia Hieracia ibidem antiquitus culta. Horum maxime memorabile genuinum *H. sabaudum* L.*), quod ab antiquissimis temporibus in hortis vulgatum fuit, Upsaliae adventitium — et eadem ratio videtur ubique, ubi haec species indicatur, in Europa boreali. *Hieracium pratense*, littora orientalia Scandinaviae modo tangens, quasi recentius adventitium, tam Upsaliae, quam Lundae et Christianiae inquilinum factum est e se-

*) Qui *H. sabaudum* cum H. boreali conjungere malunt, *verum haud cognoscunt*, quod testantur specimina *H. sabaudi* veri ab ipsis sub peregrinis nominibus missa. Nec in Britannia, nec in Austria, ut innumera specimina ex utroque loco testantur, verum nascitur *H. sabaudum*, L. — De synonymo hujus Linnaeano *nullum prorsus dubium ab ullo, qui* genuinos fontes novit, moveri potest; ab antiquissimis temporibus Linnaeana genuina planta in horto Botanico Upsaliensi adfuit et ex eodem longe abhinc emigravit. Per seculum tamen ne levissimus quidem transitus in H. boreale observatus; licet in varias degeneraverit formas, nulla sane *H. boreale* tangit.

minibus, ex hortis botanicis aufugis — ut et Gevaliae e seminibus cum saburra navali introductis.

### §. 7. *Progressus cognitionis Hieraciorum.*

Ante *Vaillantium*, ut supra jam exposuimus, generis notio prorsus vaga erat, licet haud praetervidendum sit *Morisonium* et *Rayum* sectiones vere naturales, ex achaeniorum figura et colore, indicasse, hodiernorum praebentes generum rudimenta. At instinctu, qua pollebant admirabili, Patres naturales generis species longe melius cognoverunt, quam plurimi recentiorum. Apud illos, in naturae gremio acquiescentes, certi saltim sumus definitam formam ante oculos fuisse, nec tantum singularem, e diagnosi pendentem, in herbariis obvium lusum; illorum incondita nomina plus lucis afferunt, quam recentiorum tornatae diagnoses. Postquam vetustatis ingenium et videndi rationem rite percepimus, antiquior litteratura longe magis delectat nativa sua simplicitate, quam recentior formalismus.

Speciebus vulgatissimis a *Fuchsio*, *Clusio*, *Lobelio*, *Camerario*, *Tabernaemontano* definitis, primum insigne augmentum tulit hoc genus C. *Bauhini* Prodromo. *J. Bauhinus* varia addidit, alia vero confudit. Praecipuas dein attulere symbolas *Columna*, *Boccone*, *Burserus*, acutissimus sui aevi Botanicus, *Cupani*, *Scheuchzerus*, *Rajus*, peritissimus *Sherardus*. Duo sunt hujus aevi epitomatores praecipue attendendi: *C. Bauhinus* in *Pinace* et *Rajus* in Histor. Plant.; hujus volumen tertium et sylloge stirp. exot. plurimas eximias, ob omnibus fere, mire neglectas descriptiones praebent. *Morisoni* Historia plantarum nova quaedam quoque ad hoc genus offert. *Tournefortius* addidit multas novas species e Pyrinaeis et ex Oriente, *Plukenet* extraeuropaeas. Sed haec omnia cum Cichoriaceis diversissimorum generum ita commixta sunt, ut generis determinatio vulgo maximas afferat molestias. Ad genera vero extricanda plurima juvat eximia *Vaillantiana* commentatio in Act. Paris.

1721, ceterum plures novas species addens, alia vero v. c. *H. tomentosum* et *H. villosum* mire confundens.

Sub reformatione Linnaeana plurimae veterum speciēs oblivioni traditae et dein prorsus omissae sunt, donec successive ab heroibus scientiae, *Hallero*, *Jacquino*, *Allionio*, *Villarsio* aliisque restitutae; at multa restare expositio nostra docebit. Novis symbolis genus ditare studuerunt quoque *Gouan*, *Smith* etc. Species alpium Germanicarum accurate conquisivit *Hoppe**), Helveticarum diligenter *Schleicher*, Pyrenaicas *Lapeyrouse*, Hungaricas *Kitaibel* e. s. p. *Willdenowiana editio Specierum Plantarum* species tum temporis distinctas, additis quibusdam novis, bene colligit, sed synonyma antiquiora, e variis auctoribus transscripta, pluries confundit. Inter recentiores auctores Cel. viri *Tausch*, *Monnier* et *Frölich* genus monographice **) tractarunt, sed, ut praefiscini dicam, praemature opus adgressi sunt et sine necessariis subsidiis; ad specimina sicca Cel. *Tausch* Pilosellas etc. supra omnem modum multiplicavit. *Monnier* ex herbariis, omnium malorum fonte, species nimis arbitrario modo contraxit. Solidiora et multa observatione sine dubio subnixa sunt Frölichiana studia, sed dispositio nulla vel absque omni naturalis affinitatis sensu et integra expositio singulari negligentia facta, ut frequentes contradictiones apud ipsum invenire liceat. Apud omnes, praecipue vero apud *Monnier*, vituperandum mihi videtur negligens litterarum studium; auctores primarios ad manus haud fuisse manifestum est, citationes e Sprengeliana editione Systematis Vegetabilium! saepius haustae videntur. Primarii et fide dignissimi hodierni de Hieraciis scriptores sunt Ill. viri *Koch*, *Wimmer* de Germanicis, *Gussone* de Siculis et *Asa-Gay* De Scandinavicis plurimas inde ab 1819

---

*) Bonas satis icones dedit in Sturm. Deutsch. Fl. Heft. 57, 59 etc.

**) *J. Tausch* Bemerkungen über Gatt *Hieracium* in Flora oder Regensb. Bot. Zeit. 1828. *A. Monnier*, Essai monographique sur les Hieracium et quelques generes voisins. Nancy 1829. *Frölich*, in Decandollei Prodromo System. Natur. Vol. VII.

publicavi observationes, nec non facile omnium exemplaria in Herb. Normali, at nimio species reducendi fervore deceptum has nimium contraxisse docuit plenior experientia. Nuperrime Cel. *Naegeli (in Zeitschr. f. Wissensch. Botanik, 2:te Heft.)* Pilosellas plurimas hybriditate enatas demonstrare conatus est. Ipsius vero cognitionem tam formarum quam litteraturae, prorsus neglectae, nimis mancam fuisse, mihi saltim manifestum videtur. Equidem in plerisque ab acutissimo viro propositis hybridis speciebus video modo varietates, e physicis, morphologicis et biologicis rationibus facile explicandas. Plenior cognitio geographicae distributionis hybridam aliarum naturam prorsus refellit. Hodiernam, i. e. *Kochianam*, expositionem aspere dijudicat, ad singularia vero transiens ipse fatetur se meliorem exhibere non valuisse.

## §. 8. *Specierum limitatio.*

*Species dabit characterem nec character speciem.* Hunc canonem aeque fundamentalem et constantem in speciebus extricandis, ac analogum Linnaeanum ad genera determinanda, censemus. Illo neglecto orta fingimus omne arbitrium, quotidianae in specierum limitatione cavillationes, quas, obsoleta jam omnis auctoritatis fide, an ullo tempore frequentiores fuerint nesciam. De nulla rei herbariae parte tirones et herbaristae minus judicare valent; nullam se plenius callere vulgo jactant. Nec externa facies, nec characteres plus minus prominentes quid species, quid varietas indicant, modo longa et passiva observatio. Quis ex facie externa vel characteribus Fragariam *collinam* et *Polygalam comosam* primo obtutu haud censeret varietates, quas vero genuina observatio distinctissimas testatur. Praecipui vero errorum fontes sunt: *primo* quod aliorum experientiae non fidem tribuamus, sed proprio sensu et arbitrio indulgemus, quasi primi plantas vidissemus; *dein* quod plurimi meritum quoddam positum esse fingunt in speciebus vel conjungendis vel distinguendis. Facilis esset scientia, si veritas (et veritas est sci-

entiae finis) posita sit in extremis, in alterius partis modo studio. Utraque via aeque lubrica, aeque arbitraria esse potest, neutra ad perenne quoddam ducit. At raro licet scientiam in vero et medio consistere; omne aevum in excessum s. oppositum errorem nititur. Sic ante aliquot lustra in distinguendo, hodie in contrahendo frequentius peccatur *). Plurimi fingunt, se primo obtutu ex facie vel, quod pejus, e characteribus posse dijudicare quid species, quid varietas. At *characteres nullo modo sunt specierum criteria, tantum ad species discernendas adminicula;* multa expertus nullam novit existere in rerum natura characterem ubique constantem leviorisque momenti esse species, characteribus licet subtilissimis circumscriptas, quas peritus non primo obtutu in quovis statu agnoscit sine characterum adminiculo. *Quercus pedunculata* et *sessiliflora* hinc quoque manifeste ejusdem speciei, teste *Q. pubescente* analogos lusus offerente, varietates sunt. Tantum notiones abstrusas, numquam objecta concreta absolute definire licet. Equidem ingenue fatear, me longe magis aestumare eorum studia, qui ex sedula observatione nimia distinguunt, quam eorum, qui observandi negligentia vel morositate nimia contrahunt. Cum ceterum nulla historica disciplina existere potest sine traditionis fide, in rebus ambiguis semper malo cum Patribus errare, quam dubius ex arbitrio vera dicere. Vituperamus merito levitatem, qua Hostius Mentharum species multiplicavit, magis vero mihi videntur vituperandi, qui spernentes seculorum experientiam, vetustatis et Linnaeanam, ne dicam naturae auctoritatem, lusos verticillatos *Menthae aquaticae*, *M. sativam L.* et *M. gentilem L.* cum *M. arvensi*; *Atriplicem littoralem L.* et *patulam L.* cum *A. hastata* etc. conjungunt.

---

*) Vivis coloribus depinxit Cel. *Riessig* levitatem ex singulorum characterum aberratione novas species fingendi, at hic error paucos nunc temporis seducit et longe minus perniciosus est, quam hodiernus mos species ex arbitrio modo reducendi eorum qui, v. c. *Lamium intermedium* ad *L. amplexicaule* diffine ducentes, multis locis testantur, se ne veram quidem speciei affinitatem perspexisse, sed in externa facie acquiescere.

Species in omnibus generibus minime aequaliter a se invicem distant, in vastioribus, quam pauperibus, se invicem multo magis tanguut, quod e formarum copia necessarium fingerem. Colliguntur vero in vastis generibus circa certos typos vel species primarias, circa quas ut centrum reliquae, tamquam satellites, rotant. Has aliis placet species, aliis varietates, licet constantes sint, et aetatis filias appellare, quasi nunc temporis originem et genealogiam extricare liceret. At ipsa contentio levioris est momenti, utpote proponendi formam, nec rem ipsam, spectans; in eo enim vertitur rei cardo, ut species acutius limitentur, ut meliores characteres, nec plures nec pauciores species, detegantur, ut singularum historia et geographica distributio plenius inquiratur, ut omnes formae constantes, sepositis accidentalibus, ex intima affinitate in stirpes vere naturales colligantur, quo facto mihi perinde est; utrum formam in natura definitam speciem an subspeciem vel, contradictione in adjecto, varietatem constantem salutare lubeat. Equidem vero in his rebus Ehrharto, in speciebus affinibus rimandis nunc summo, sui licet aevi haeretico, assentiar: "*Tales species* (quales Hieracium Pilosella Scop. et Bromi omnes annui a Scopolio in unam speciem juncti) *orthodoxi Botanici* tribus *appellant* *).

## §. 9. *Varietates et hybriditates Hieraciorum.*

"*Varietates leviores*, monente Linnaeo, *non curat Botanicus*". Omnes facile varietates, quas attulit d. Frölich, sunt modo individuales lusus, quales in infinitum addere licet, scientiam diffusam et molestam tantum reddentes. Quamdiu incompletam habemus speciei cognitionem multas distinguimus varietates in futurum examen; sed specie in genuino ambitu explorata plurimae varietates evanescunt. Plurimas, quas ad-

*) Ejusmodi species facile compares cum stellis duplicatis, triplicatis etc, quae primo obtutu unam modo sistere videntur, acutius vero lustratae plures ob propinquitatem, optico modo errore, confluentes. Tribus nondum extricatae sistunt *nebulosas*, quas pigris species salutare lubet.

misi varietates, synonymorum gratia proposui. Scientiae objectum est, non omnes singulares lusus, inventa lege generali, attendere, sed constans et aeternum in infinita varietate quaerere.

Occurrunt saepe varietates, quae vel externa facie vel characteribus ad aliam speciem accedere videntur. Has varietates *species hybridas* vulgo appellant. *Certa* vero *experientia* haud confirmata est vel unici *Hieracii* hybrida origo. Nimia, qua aequales urgentur, fames hybriditatum delebit *primo* veram specierum explorationem, *porro* omnem attentionem ad varietatum physicas et physiologicas causas, quasi plantae absque hybriditate variare non possent. E decem speciebus hybridis nunc dictis, novem esse varietates facile demonstrare licet. Ad hybriditatum voluptas trahit omnes, 1) qui de specierum limitibus dubii rem absolutam fingunt: "videtur hybrida planta"; 2) qui omnes recentius distinctas species ex arbitrio delere student: "est hybrida forsan planta"; 3) quibus pravas ut species tueantur, necesse est manifestos transitus "pro hybridis formis" declarare. At cum hybridas suas species haud limitare valent, ulterius hybriditates hybriditatum tertii, quarti e. s. p. gradus urgent. Meo sensu verae et ingenuae hybriditatum observationes, quales *Köhlreuteri* et *Gaertneri*, biologiam plantarum maxime illustrant, at e systemate, v. c. Pelargonia hybrida, omnis instar merae accidentalis, prorsus delendae tamquam merae curiositates.

## §. 10. *Synonymia Hieraciorum.*

Cum praecipuum meum studium fuit in synonymis stabiliendis positum, absque speciminibus authenticis vix umquam Auctores citare sum ausus, nam definitiones vulgo vagae et descriptiones notas maxime essentiales vulgo omittant. Omnium vero nominum, quae mihi innotuerunt, rationem reddam in indice synonymorum eodemque loco singularum determinationem vel ex aliorum testimoniis vel e descriptionibus indica-

bo Multa nomina, nullius momenti, ut Hortorum Botanicorum, Herbariorum et omnia haud publicata tam levis ponderis mihi visa sunt, ut his noluerim longam synonymorum seriem onerare.

His licet adhibitis cautelis facile video de multorum vero loco dubia moveri posse, cum ab eodem auctore saepe diversarum specierum analogas formas distributas viderim. Cum hoc accuratissimis Hoppeo et Frölichio accidit, ut specimina coram nobis testantur, quid ab aliis exspectandum? Explicationem offert facilem ejusdem speciei diversis temporibus limitatio; sic *H. boreale* verum et semper nobis primarium exacte idem est *H. silvestre* Tausch; sed dein huic tamquam varietates in ulterius examen subjunxi formas, quas nunc plenius exploratas distinctas agnosco.

Ut antiquiora synonyma, specierum verae cognitionis fundamentum, extricarentur non licuit in plantis Hieraciis nunc dictis subsistere, sed synonymiam Cichoriaccarum ex integro revidere; nam primus obtutus docebat, ne dimidiam partem quidem esse determinatam et e determinatis dimidium iterum numerum perperam. Videbis v. c. in Specierum Plantarum editone Willdenowiana sub eadem specie plura diversarum specierum synonyma esse collocata vel idem synonymon sub pluribus valde diversis plantis citatum. Recentiores monographi vix levissimam quidem cognitionem divitis antiquioris litteraturae sumserunt, quod haud mirum, cum ne quidem recentiora opera primaria ipsi viderint. *) Antiquam litteraturam multi immerito

*) Quamvis meas species citent, manifestum est ipsos mea scripta numquam vidisse sed e Spreng. systemate suam notitiam sumsisse. Melius sine dubio est auctorem negligere, quam e spurco fonte citare. Ob aevi alios transcribentis fervorem scientia tot falsariis referta est, ut eruditus horrescat. Haec corrigere vix juvat, cum falsa transscribere tamen pergant. Sic Cel. *Nolte* et equidem saepe monuimus, nullum umquam existisse Botanicum nomine *Wiggers*, licet hic vir respondentis munere fungeretur, *Weberus* Auctor, ut ipse testatur, solus fuit Primitiarum florae Holsaticae. Eadem ratio cum *Nordholm* citatur tamquam Auctor *Nidulariarum* etc; ille sane nescit, utrum Nidulariae sint aves an pisces. Cel. *Gri-*

spernunt; res herbaria est historica disciplina indeque nil definitum, nil stabilitum proponitur neglecta continua evolutione. Et propter historicam vim et propter ipsius ingenuitatem antiquiorem litteraturam magis quam recentiorem saepe aestumo; illa longe magis clara et definita, quam multa nova inania nomina. Qua revelatione hoc dicere ausim, multi forsan mirentur, nescii fontium, quos exhaurire studui. Sic vix lineam antiquioris Hieraciorum litteraturae restare fingerem, quam haud saepius perlegi et permeditavi, et si non singulos auctores et species, sed cuncta uno quasi conspectu intucamur, lux clara in tenebris oritur. Praecipuum vero fontem praebuere plurima, quae consulimus. antiquiora herbaria, inter quae principem locum sibi vindicat *Burserianum*, ditissimum, optime conservatum, in quo servantur plurima et authentica magis specimina specierum C. Bauhini pinacis, quam in ipsius Bauhini herbario *), etiam plurimae novae. Sedulo porro collegi omnia testimonia de speciebus in herbariis *Bauhinorum*, *Tournefortii* et *Vaillantii* adhuc servatis, quibus non sine critica comparatione in dubiorum interpretationem usus sum.

---

*esebach* loco *Rottböll* citat *Friisium*; idem est ac si Auctorem Fl. Germanicae non *Kochium*, sed *Danielem* salutares. Et sic in ceteris. Frequentius est tamquam speciei auctorem citari virum, apud quem frusta quaeres, v. c. *Allium fallax*, Don. Hoc nomen apud Don non occurrit, l. c. ab illo dicitur *H. angulosum*, Varia mihi adscripta vidi nomina, quae antea numquam audivi vel aliis debentur, v. c. *Cerastium macilentum* etc. Est vero alia citandi ratio, quae flagrantior et insidiosa, ut nempe aliis auctoritatem privent, quando v. c. Auctor indicatur tamquam speciem proposuisse formam, quam talem numquam agnovit, v. c. "*Menyanthem paradoxam* Fr.," Dec. Prodr., quam equidem semper tamquam monstrositatem *M. trifoliatae* proposui. Sic quoque "Küleria intermedia". Veronica calycida, "Euphrasia curta" etc., etc., a me numquam tamquam species propositae sunt. Majoris vero momenti est, plurimas plantas Linnaeanas prorsus falso interpretari, ut argumentis numquam refellendis plane evictum est, nihilo tamen minus prisci errores continue propagantur v. c. de *Filagine montana*. L.

*) Admirabilem Burseri stirpium Europaearum, suo tempore longe superiorem, cognitionem herbarium ipsius Upsaliae testatur. C. Bauhinus quidem in singula pagina Prodromi Burserum tanquam suarum specierum inventorem citat, at ex herbario patet Bauhinum longe plures a Bursero recepisse.

## *Corrigenda:*

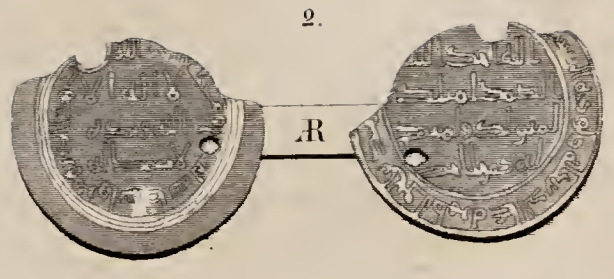
| | | |
|---|---|---|
| *Pag.* 232 *lin.* 14. | intrataeniensi | *leg.* extrataeniensi |
| — — — 16. | Fucoideae | — Fucaceae |
| — 233 — 7. | Sporochnoideae | — Sporochneae |
| — 234 — 3. | solummodo | — saepissime |
| — — — 11. | Sphaerococcideae | — Sphaerococceae |
| — 236 — 15. | steiles | — steriles |
| — 240 — 22. | Sporochnoideae | — Sporochneae |
| — 244 — 4. | v. c. | — i. e. |
| — — *in not. lin.* 2 | Lunardini | — Zanardini |
| — — — — — 3 | die | — di |
| — 247 *lin. ultima* | nolim | — velim |

— 254 *post lin. 4 adde:* Halicoccus nodosus Aresch. ap. Fries, Summa Veg. Scandinav. 1844 p. 123.

— 274 — 18. interstiti *leg.* interstitiis

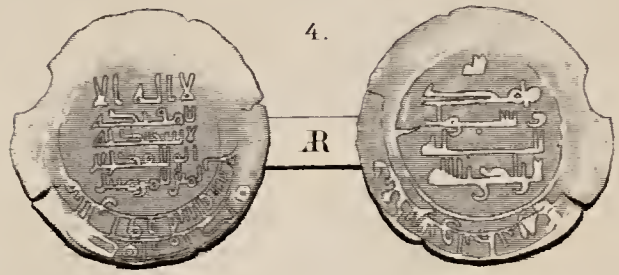
1.

2.

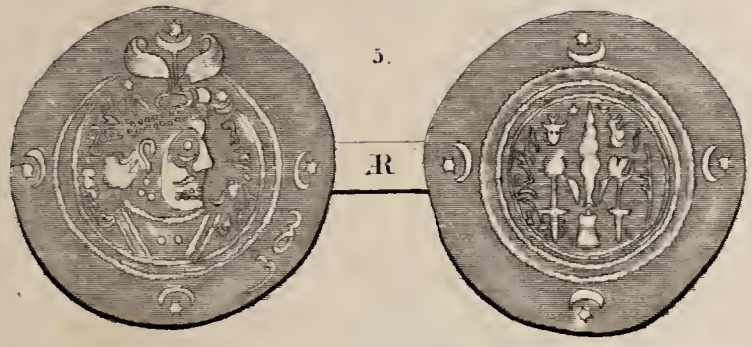



3.

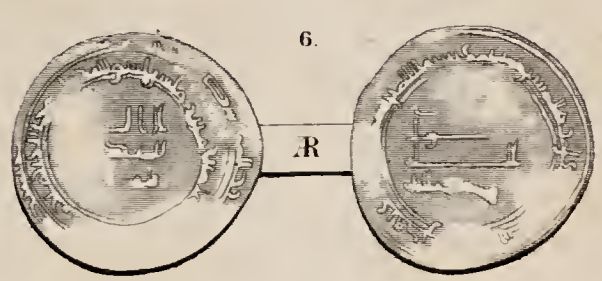
4.



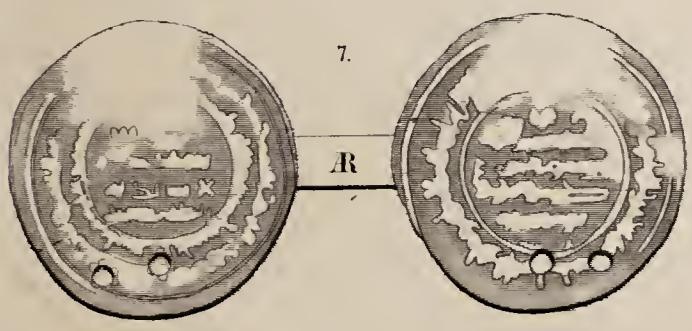

5.




6.




7.




8.

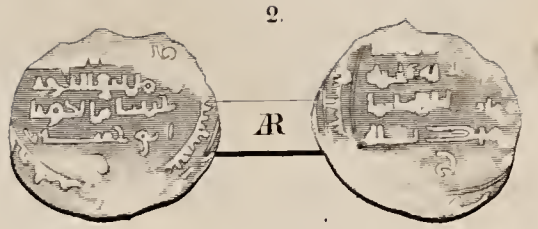
9.

10.

1.

AR

2.

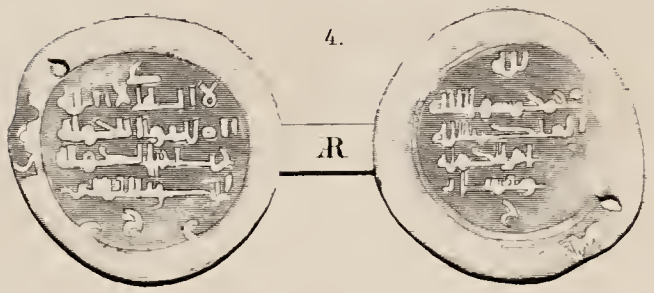


AR

3.

AR

4.

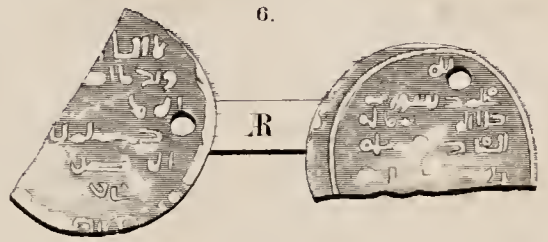


AR

5.

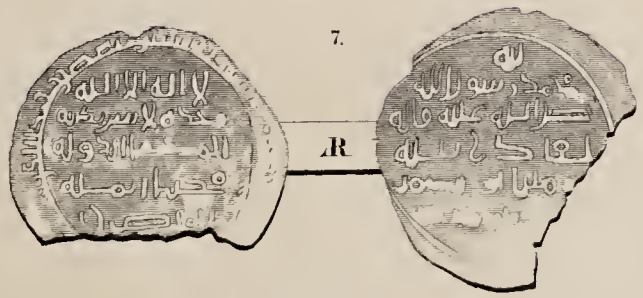
AR

6.

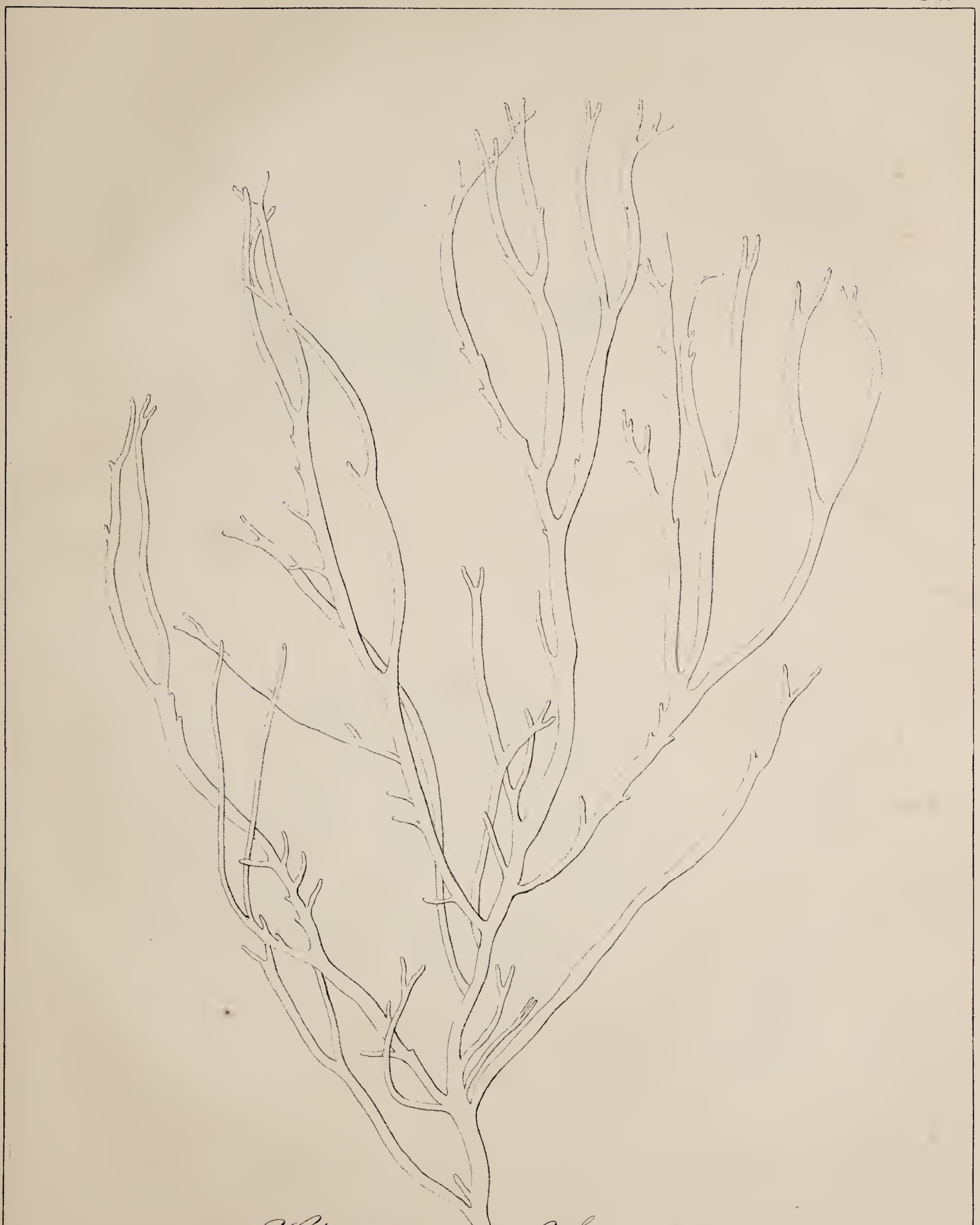


AR

7.



AR



*Halicoccus nodosus, β furcatus.*

J.V. Areschoug del.

Stentr. af A. Hårdh.

A.

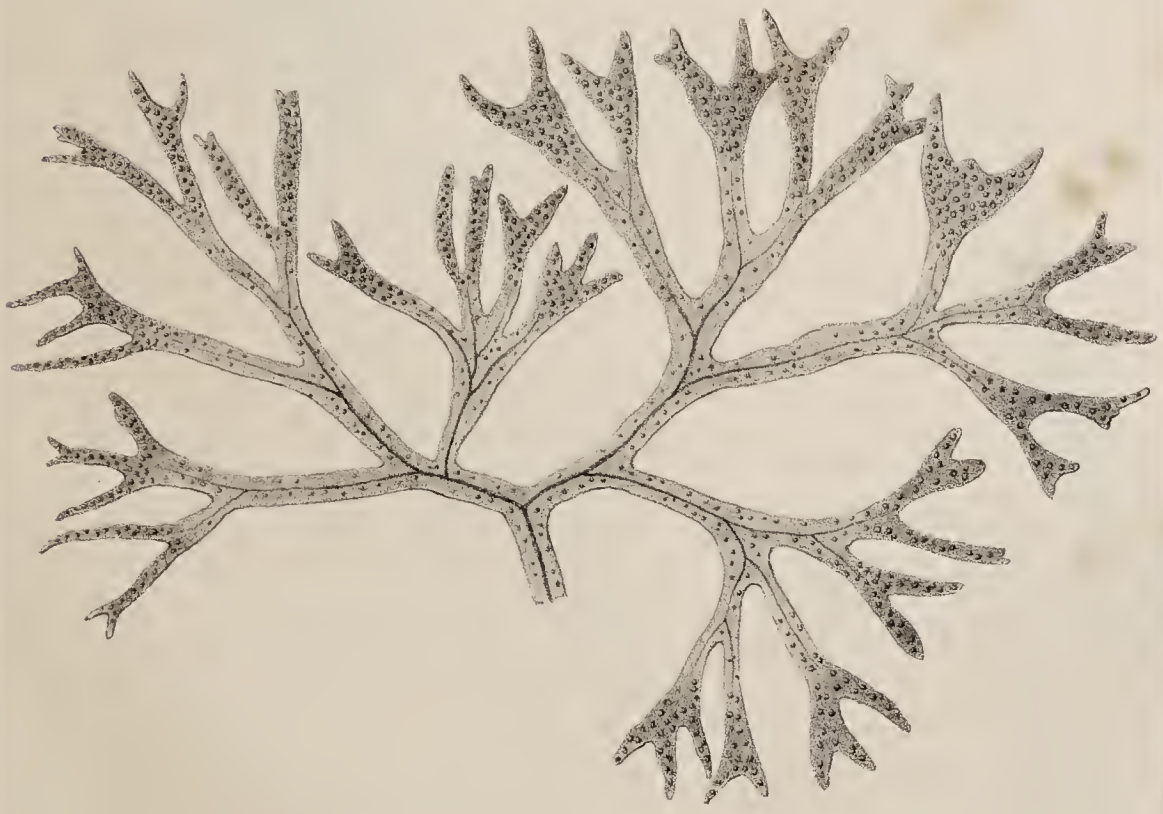
f. 1.

f. 2.

f. 3.

*Fucus vesiculosus.*

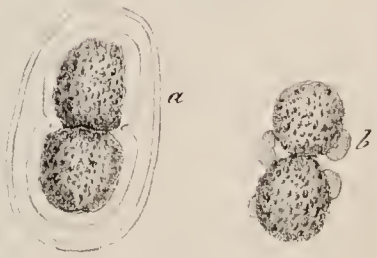
B.



*Fucus ceranoides.*

C

f. 1.



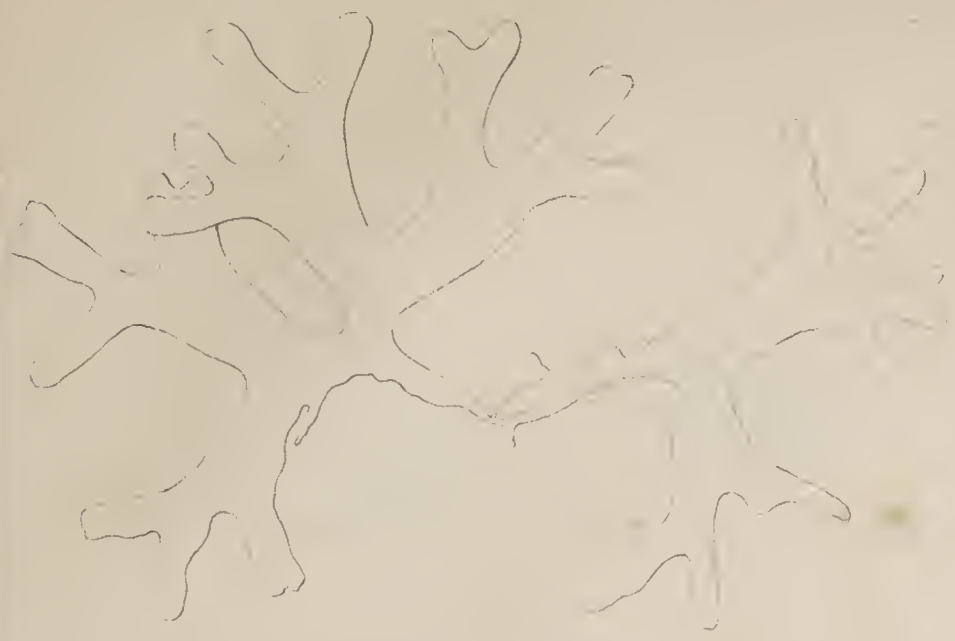

f. 2

*Fucus canaliculatus.*

J. E. Areschoug del.

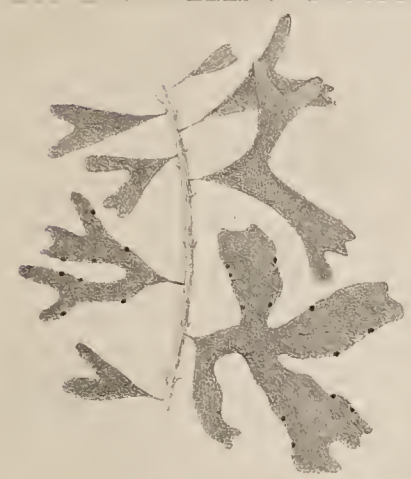
Stentr. af A. Wärdh.

B



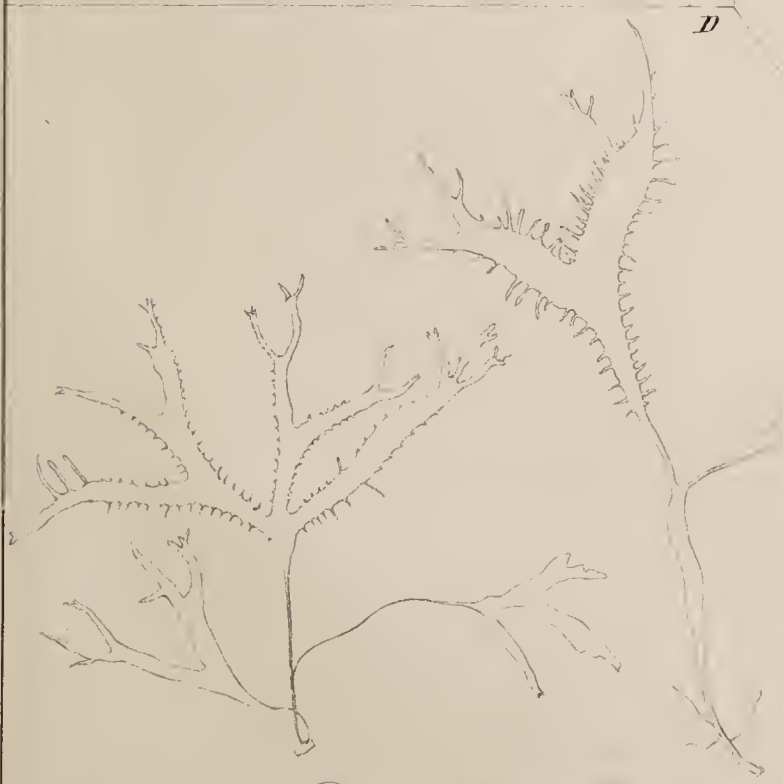
Rhodomenia Palmetta.

C



Rhodomenia bifida.

D



Rhodomenia ciliata.

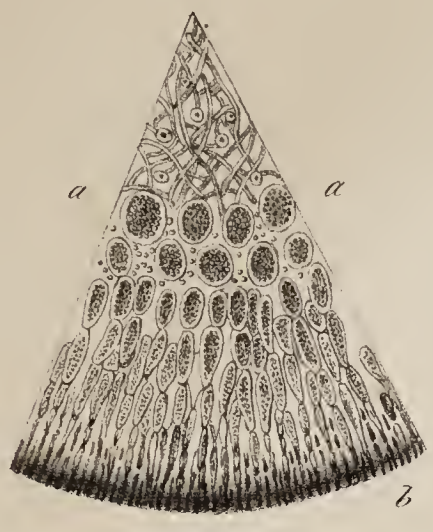
A

Phyllophora Brodiæi β

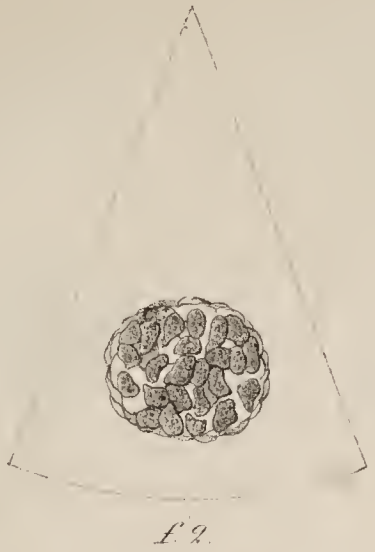
J.E. Areschoug del.

Stentr. af A. Hårdh.

A




f. 1



f. 2.

f. 3

f. 4

*Furcellaria lumbricalis.*

B

f. 1.

f. 2.

f. 3.

*Helminthora multifida.*

C

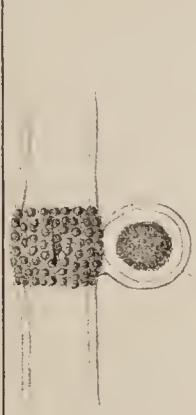
f. 3

f. 1.

f. 2.

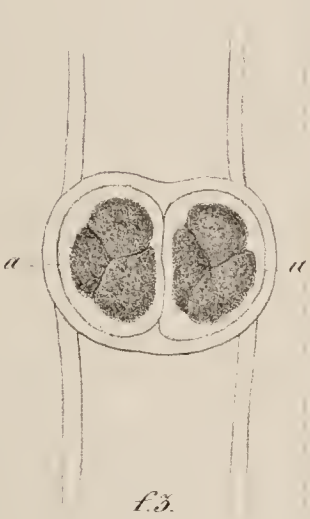
*Gloiosiphonia capillaris.*

D




f. 1.

f. 2.




f. 3.

*Ceramium tenuissimum.*

E

f. 2.

f. 1.










*Callithamnion plumula.*

F

f. 1.

f. 2.

*Callithamnion Hookeri.*

G

f. 1.

f. 2.

f. 3

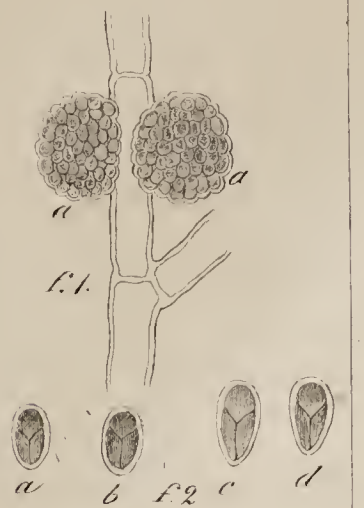
f. 4.

*Callithamnion seirospermum.*

J. E. Arrevehoug del.

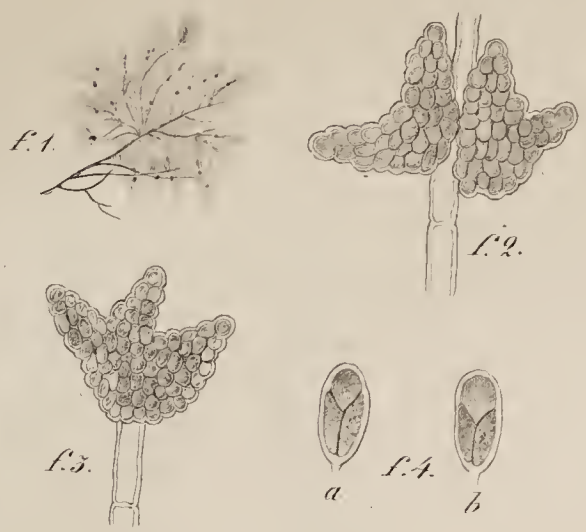
Steintr. af A. Hårdh.

A




*Callith. corymbosum*

B




*Callith. byssoides*

C

*Spermothamnion Turneri.*

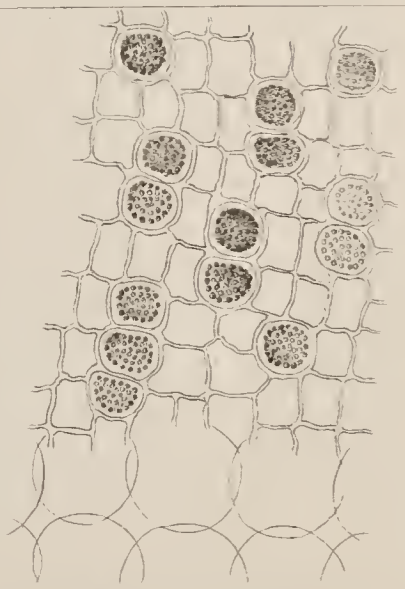
F

*Dictyosiphon foeniculaceus B.b.*

D

*Trentepohlia Daviesii*

E



*Striaria attenuata.*

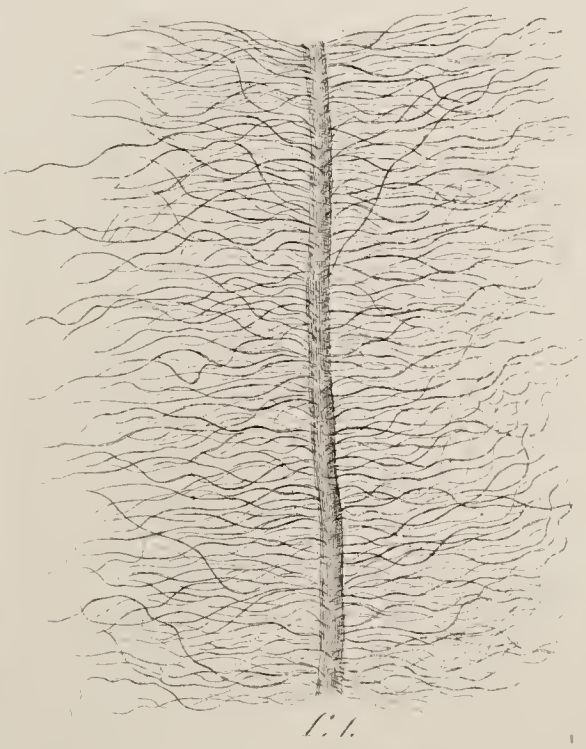
A

*Dictyosiphon foeniculaceus a c.*

B

*Dictyosiphon foeniculaceus a a*

C

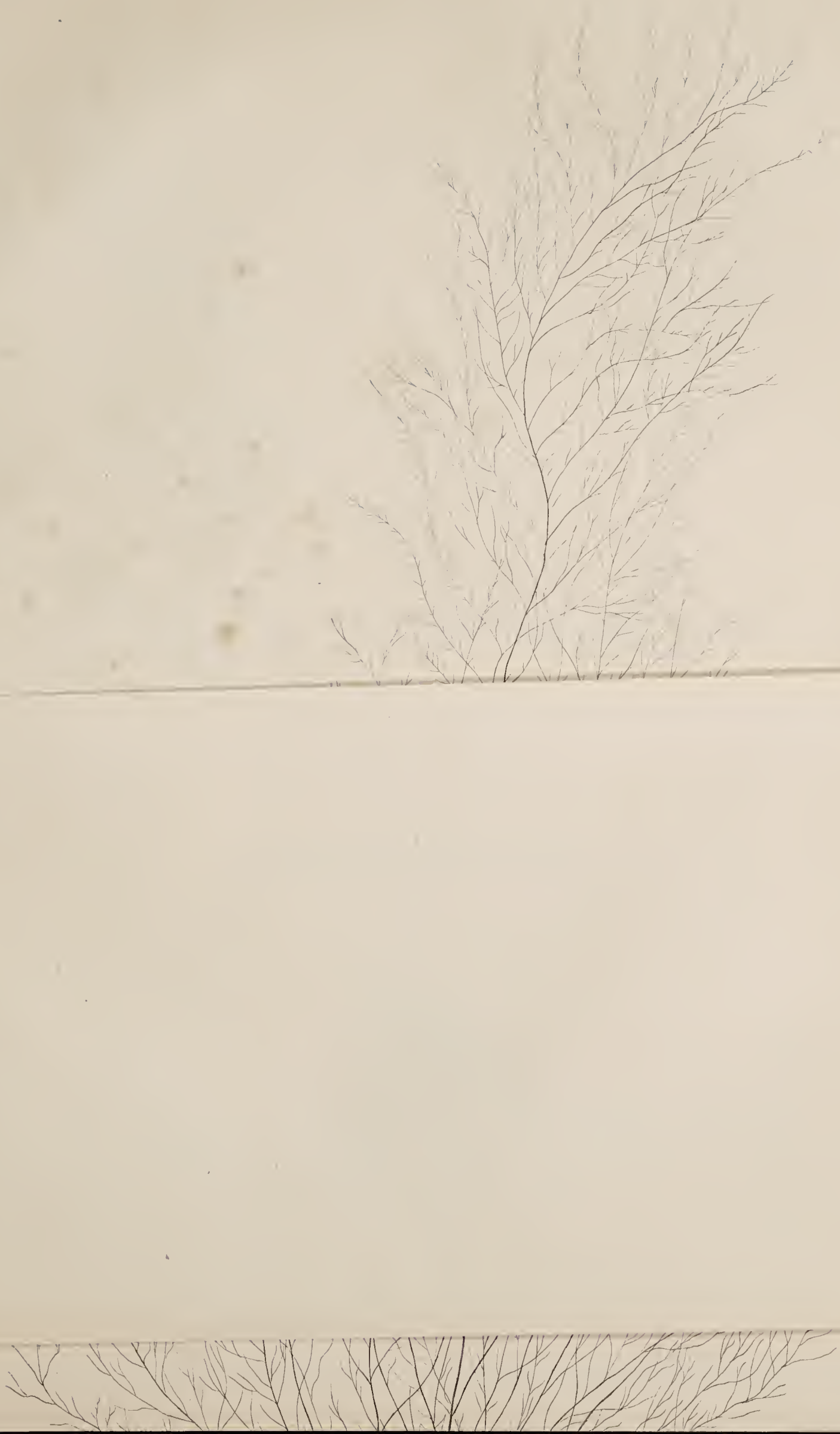


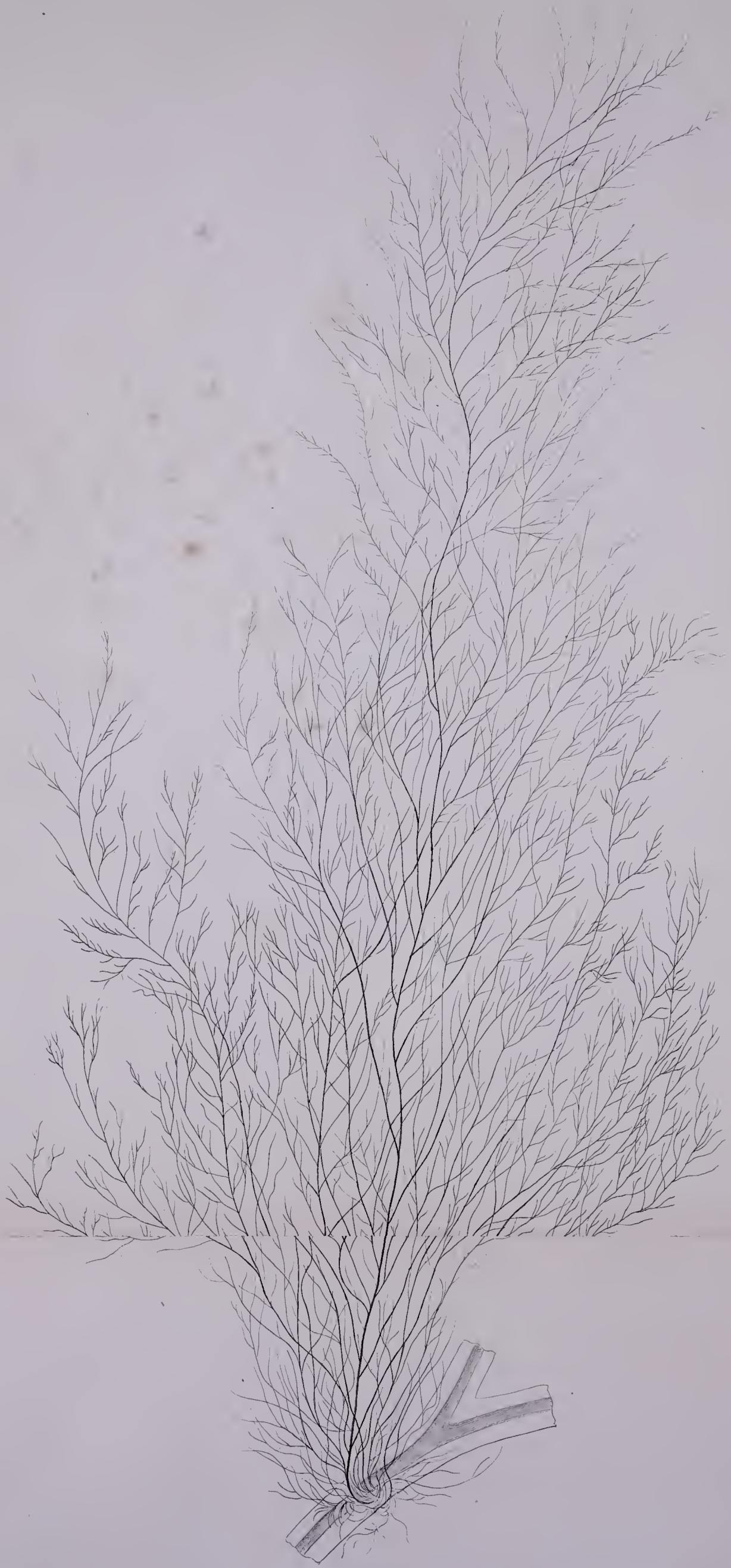
*f. 1.*

*f 2*

*f 3*

*Dictyosiphon pusillus*



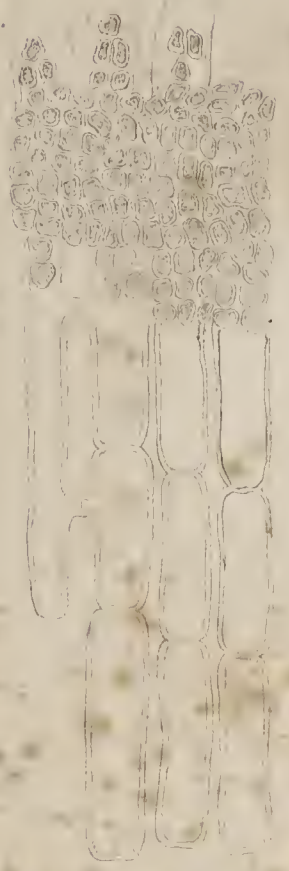


*Dictyosiphon fœniculaceus β.*

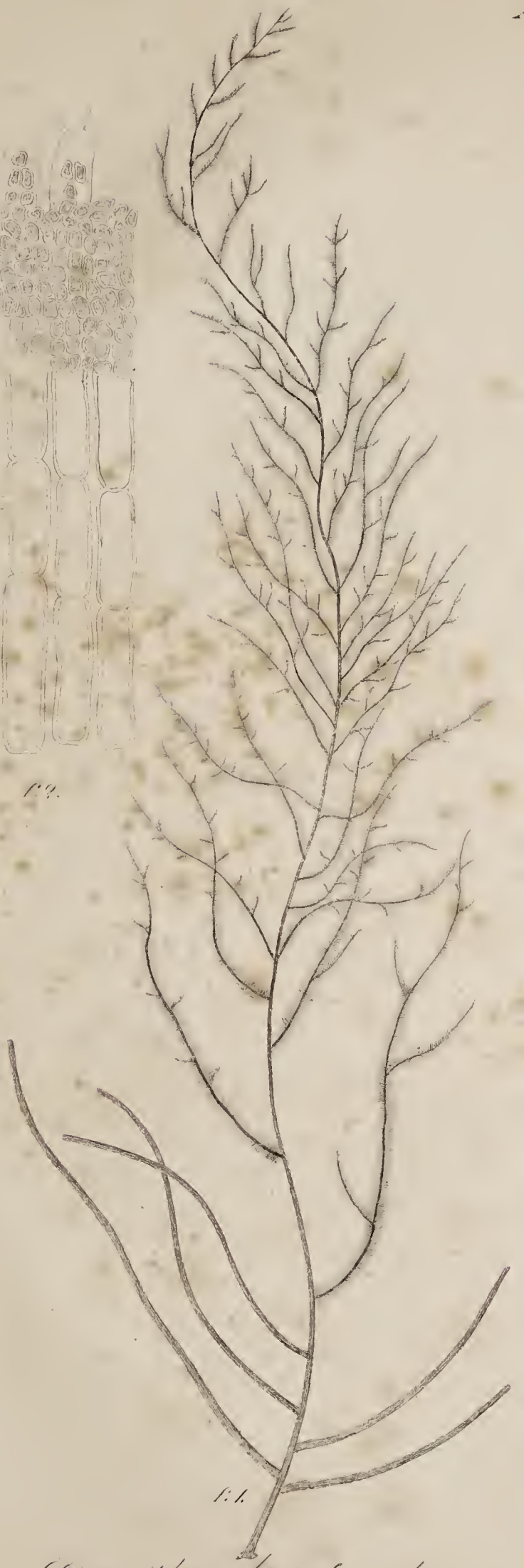
J.E. Areschoug del.

Trycket hos A. Bonath

A



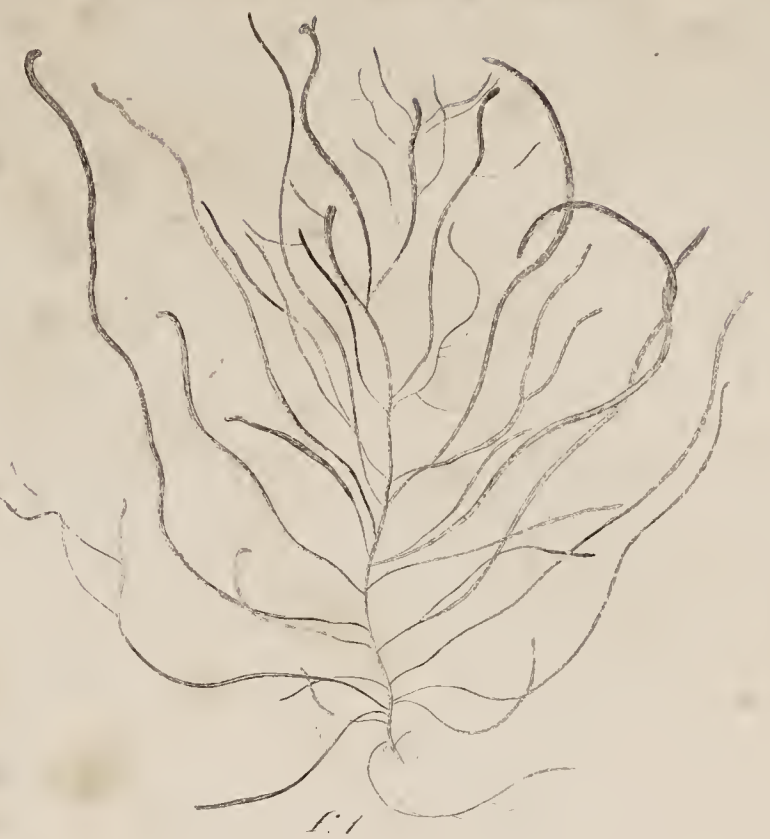
f. 2.



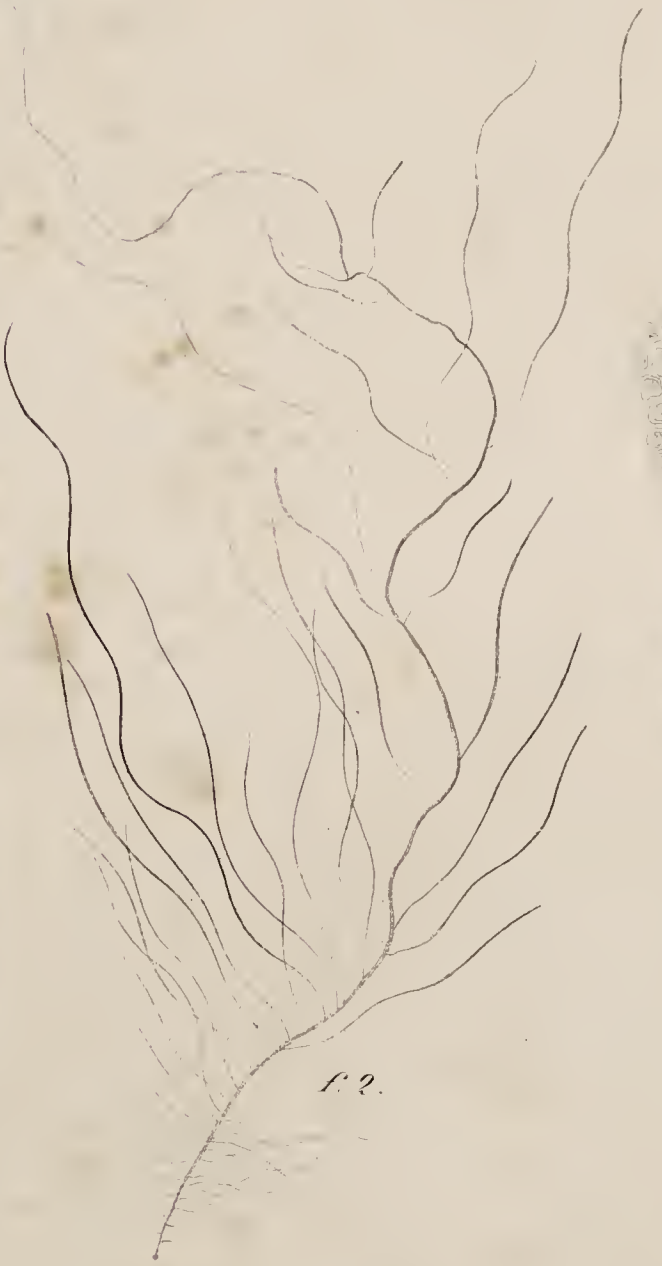
f. 1.

Dictyosiphon fœniculac. a b**

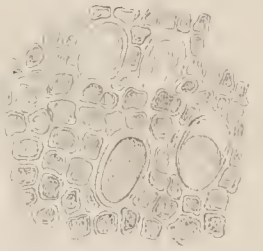
B



f. 1



f. 2.



f. 3.

f. 4.

Dictyosiphon Chordaria.

A

f. 2.

B

f. 2

f. 1.

Lathosia difformis.

f. 1

f. 5.

f. 3.

f. 4.

Chordaria divaricata.

C

Elachista juncola.

D

Elachista globosa Ürst.

E

Elachista stellaris.

J. E. Areschoug del

# INDEX

## ACTORUM.


I. Histoire de la Société Royale des Sciences d'Upsal, par J. HENR. SCHRÖDER . . . . . pag. I.

II. Observations sur la Transformation des Intégrales multiples, par AD. F. SVANBERG . . . . . pag. 1.

III. Calculi differentiarum finitarum inversi exercitationes. Auctore E. G. BJÖRLING . . . . . pag. 14.

IV. Doctrinæ Serierum Infinitarum exercitationes. Auctore E. G. BJÖRLING. Pars 1:ma . . . . . pag. 61.

V. Conséquences nécessaires de l'équation de la continuité des fluides, exposées par ER. EDLUND . . . . . pag. 87.

VI. Symbolæ ad rem Numariam Muhammedanorum ex Museo Regio Holmiensi edidit C. J. TORNBERG . . . . . pag. 103.

VII. Doctrinæ Serierum Infinitarum exercitationes. Auctore E. G. BJÖRLING. Pars II:da . . . . . pag. 143.

VIII. Tumor Sanguineus in regione inguinali sinistra, descriptus a C. H. BERGSTRAND . . . . . pag. 187.

IX. Nummorum Anglosaxonicorum centuria selecta E Museo Academico Upsaliensi deprompta, digesta et illustrata a JOH. HENR. SCHRÖDER . . . . . pag. 205.

X. Phycearum, quæ in maribus Scandinaviæ crescunt, enumeratio. Auctore JOH. ERH. ARESCHOUG. Sectio prior Fucaceas continens . . . . . pag. 223.

XI. Symbolæ ad Historiam Hieraciorum. Auctore ELIA FRIES. pag. 383.